

## Funzioni periodiche e loro applicazioni nella descrizione di fenomeni naturali

---

**Nome del tir:** Federico Federici<sup>1</sup>

**Scuola:** Liceo A. Issel, Finale Ligure

**Periodo:** a.s. 2003-2004, classe III D (P.N.I.)

**ISV:** Annamaria Somaglia

**IDC:** Domingo Paola<sup>2</sup>

**Scuola:** Liceo Scientifico A. Issel Via Ghiglieri 10  
17074 Finale Ligure (SV)

"We are neural beings, our brains take their input from the rest of our bodies. What our bodies are like and how they function in the world thus structures the very concepts we can use to think. We cannot think just anything - only what our embodied brains permit."

George Lakoff

### Introduzione

L'argomento sviluppato nell'arco del progetto di tirocinio è stato scelto con lo scopo di analizzare *nel divenire* la possibilità di introdurre concetti matematici a partire da contesti reali, dei quali non venga discusso o proposto preliminarmente alcun modello specifico.

Nella fattispecie, l'osservazione di un semplice moto periodico, innescato dalla perturbazione dell'equilibrio di una massa appesa verticalmente ad una molla e soggetta alla sola gravità, è servita come spunto per indurre una iniziale osservazione libera del fenomeno, attraverso l'utilizzo di un linguaggio non scientificamente formalizzato, che conducesse ad una progressiva presa di coscienza degli elementi caratteristici del fenomeno osservato e portasse così alla necessità di definire o costruire gli strumenti più adatti per la sua descrizione in ambito scientifico.

Tale approccio, lungi dall'essere meramente esplorativo di limiti o potenzialità di metodologie didattiche diverse (*cognitivismo, costruttivismo* ecc.), si è rivelato particolarmente adeguato a seguito della discussione in classe dei risultati del questionario iniziale e, successivamente, degli elaborati relativi alle schede di lavoro di volta in volta proposte. Si sono infatti apertamente manifestate in questo contesto barriere linguistiche prima ancora che concettuali, ambiguità talvolta riconciliate con la semplice richiesta di una più esplicita espressione del pensiero, ma più spesso superate a fatica sul filo di una difficile mediazione tra intuizione e sua *espressione linguistica*, pur dichiaratamente libera di far uso di materiali e prestiti da linguaggi non formali (gestualità, disegni, costruzione di metafore ecc.).

Si è per questo preferito far da subito riferimento al materiale grezzo dell'esperienza vissuta e raccontata, all'immediatezza di percezione e rappresentazione, piuttosto che costruire un percorso a tappe attraverso testi o manuali di riferimento. Chiunque abbia una certa consuetudine con forme di apprendimento indiretto (orale o scritto è indifferente) dovrebbe infatti convenire che l'idea che esse costruiscono del mondo è troppo spesso contraffatta dallo stile, dagli artifici linguistici che frappongono la percezione, il gusto di chi scrive tra chi legge e l'oggetto, la situazione proposti.

Ciò è non meno vero in un romanzo, un diario di viaggio o in un testo di Fisica o Matematica.

Non di rado, infatti, libri pure meravigliosamente scritti intorno alle più moderne teorie scientifiche, richiedono che il lettore abbia già *visitato quei luoghi*, possieda una certa familiarità con usi e costumi per poter accedere ad un livello successivo, più profondo, che è quello della condivisione della cultura, della sua partecipazione attiva, che solo allora ha significato di conoscenza non inerte, perché in grado di destare meraviglia e, quindi, nuova curiosità e scoperta continua. Diversamente, avviene che il ricordo

---

<sup>1</sup> [federicof74@libero.it](mailto:federicof74@libero.it)

<sup>2</sup> [domingo.paola@tin.it](mailto:domingo.paola@tin.it)

serbato sia ricordo di associazioni più o meno efficaci di termini o parole, prima ancora che di vive impressioni suscitate nell'animo. Se poi una filastrocca, pure priva di senso, può rimanerci in mente per la sensazione di gradevole leggerezza che provoca il solo ripeterla per gioco, quale astruso divertimento può invece celarsi in una complicatissima relazione, frutto di un altrettanto complicato (e mai fino in fondo esatto) calcolo fisico?

Le discipline scientifiche soffrono per questo spesso di patologie del linguaggio che le rendono, già in partenza, ingiustamente astruse e poco interessanti, come il racconto di un viaggiatore di cui non si conosca la lingua. È in tal senso esperienza comune nell'insegnamento riscontrare una maggiore facilità di sopportazione della Matematica da parte delle persone piuttosto che della Fisica: una volta accettate le regole del gioco, per quanto la cosa possa sembrare inutile e tediosa, la Matematica non soffre (quasi mai) di un riscontro diretto con la realtà che la renda irragionevole nei termini in cui è posta. L'approccio, largamente diffuso, che parte dalle risposte per risalire alle domande, che antepone la formalizzazione del fenomeno al fenomeno stesso è proprio una delle radici di questo scollamento tra la Fisica studiata e l'esperienza ed è quello cui si è cercato di ovviare nel corso del progetto proposto.

Il linguaggio può allora prendere forma come elemento necessario, veicolo non esclusivo e, insieme, forma di conoscenza, senza essere somministrato come *a-priori*. In tal modo si prende, a mio avviso, parte attiva al processo di fondazione della grammatica del linguaggio che si usa, si toccano i nodi cruciali attraverso i quali passa ogni forma di conoscenza, si acquista una visione dall'interno del linguaggio, smarcandolo, per quanto possibile, dal suo aspetto rigidamente formale. È allora possibile a poco a poco scoprire come ogni affermazione, ogni relazione, sia, in realtà, conoscenza espressa in forma ancora incompleta, non del tutto sviluppata, pure all'interno di un linguaggio autonomo come la Matematica, attraverso il quale dare un possibile vestito alle cose, senza per questo precluderle la possibilità di ulteriori sviluppi indipendenti, a volte legati a questioni di pura estetica del pensiero, a volte addirittura in grado di anticipare la realtà fenomenologica<sup>3</sup>. Tutto questo non deve, naturalmente, condurre ad un mero spostamento del problema, per cui semplicemente ogni questione didattica sulla Fisica scompare se ci si pone e si risolve il problema della didattica della Matematica, o viceversa.

Come si è avuto modo di constatare attraverso l'interazione con gli studenti, le due cose restano affatto distinte, ancorché correlate. Mi pare anzi che i termini siano in una certa misura gli stessi che collegano lo studio di una lingua (la Matematica) all'uso che se ne può (o vuole) fare (la Fisica). L'educazione alla costruzione e all'uso di un linguaggio necessario è stato quindi un *fil rouge*, che ha attraversato l'intero progetto, divenendo guida più o meno implicita per la costruzione e realizzazione delle unità di lavoro, nella convinzione che né linguaggio né conoscenza sono di per sé universalmente dati dall'oggetto sotto studio come sua rappresentazione, ma rivelano tutto quel modo spirituale di rappresentare la realtà che ci caratterizza come individui unici. A quel punto, il difficile equilibrio da trovare (a spese di un proprio personale lavoro di progressiva interiorizzazione) è quello tra la costruzione di un metodo e l'improvvisazione creativa. Saper leggere gli eventi, "*riappropriarsi delle cose nominandole*"<sup>4</sup>, cogliere anche un poco oltre la loro più immediata evidenza è attitudine non da poco, specie laddove, come nella Fisica moderna, il senso comune viene spesso a far mancare il suo appoggio. Ben più facile sarebbe, ad esempio, poter organizzare il mondo microscopico per analogia classica con quello macroscopico, accettando per buono il modello di atomo con elettroni orbitanti intorno al nucleo secondo lo schema di un sistema solare in miniatura<sup>5</sup>. Ci si accorge, allora, provando a raccontare come andrebbero le cose in quel mondo, che non tutto torna, non tutti i comportamenti attesi sono rispettati dalle parti in causa. Non si tratta che di accettare quel gioco come un qualcosa di nuovo, così come con sforzo, all'inizio, ci si è magari esercitati a guardare la caduta di un grave libero o vincolato ad una molla con occhi non bruciati da una distratta consuetudine. Non si può allora più fondare il proprio racconto su schemi puramente formali e rigidamente deterministici ed emerge quindi con chiarezza come, mano a mano

<sup>3</sup> "I dispositivi matematici della meccanica quantistica non relativistica, applicati con successo nella soluzione di differenti problemi della fisica atomica, ebbero a lungo una non ben definita interpretazione fisica" [Fock, "Scritti sulla meccanica quantistica"]

<sup>4</sup> Mario Luzi, "Colloqui sulla poesia"

<sup>5</sup> "Pascal supponeva che l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo avessero la medesima struttura. Se così fosse, in ogni aspetto del reale si dovrebbe trovare lo stesso ordine, retto dai medesimi concetti di fondo. L'Universo non sarebbe che un gioco di identiche scatole cinesi, di dimensioni mano a mano più trascurabili. Fortunatamente la realtà è molto più ricca ed interessante" [da Una critica di Langevin alle idee di Pascal]

che si procede al di là del *velo delle stelle fisse*, il linguaggio che ci si è abituati a costruire, a forgiare, ci richiede esso stesso di rifondare la nostra esperienza, rimetterla completamente in gioco, in una marcia in cui ad aprire il passo è ora l'evidenza sperimentale, ora la congettura teorica. La struttura stessa che rivela la Natura sembra, a sua volta, esigere questo continuo scavalco tra linguaggio ed esperienza: ogni atto di misura rivela in sé una ben più intima partecipazione agli eventi in corso che non la semplice osservazione. La cosiddetta comprensione scientifica dei fenomeni, la sua pretesa di universalità, possono allora recuperare un significato autenticamente umano, che resterebbe diversamente loro precluso. È aperto così lo spazio perché le idee "alte" della Fisica non servano solo a legittimare un nuovo illuminismo di casta sorretto da rappresentazioni didascaliche dell'universo, occasionalmente cambiate a seconda dell'evoluzione del pensiero, come etichette appiccicate sempre diverse allo stesso quadro da un collezionista capriccioso.

## **Situazione iniziale della classe**

L'analisi delle osservazioni raccolte attraverso le osservazioni libere o guidate nel corso del tirocinio del primo anno, insieme con un iniziale periodo di affiancamento, di fatto iniziato già nel corso dell'ultimo periodo dell'anno scorso, hanno permesso di formulare una mappa delle dinamiche interne al gruppo classe, insieme con una graduale presa di coscienza delle peculiarità dei singoli e del metodo di lavoro dell'IDC. L'inserimento, avvenuto all'inizio di quest'anno a seguito di un accorpamento tra classi, di una decina di alunni provenienti dal corso tradizionale, non ha prodotto eccessivi scompensi e, pur essendo ancora fonte di preoccupazione, costituisce un problema in via di superamento, anche grazie a una metodologia di lavoro sempre attenta non solo agli aspetti cognitivi, ma anche a quelli emozionali e alle dinamiche di interazione sociale in classe. Nei due anni passati l'IDC ha lavorato *per gruppi di livello* nelle attività di scoperta e costruzione di conoscenze, mentre nelle attività di recupero i gruppi erano invece formati da studenti di *diversa livello*. Quest'anno, proprio per favorire e accelerare l'integrazione dei due gruppi e anche per i limiti imposti dall'aula, l'IDC ha pensato di formare gruppi di quattro componenti, 2 dell'ex II D e 2 dell'ex II A, disposti in due banchi consecutivi e in modo tale che in ogni banco ci fossero uno studente/essa dell'ex II D e uno/a dell'ex II A. La scelta delle persone provenienti da una stessa classe da inserire nei vari gruppi ha tenuto conto, per l'ex II D di capacità nel lavorare insieme e di livelli di preparazione non troppo diversi, mentre per l'ex II A si è lasciata completa libertà agli studenti. Nei momenti (piuttosto frequenti) di discussione collettiva in classe e in ogni altra circostanza, lo scambio di informazioni fra i gruppi è consentito. L'impressione che emerge dalle prime osservazioni libere (utili per dare continuità al lavoro iniziato l'anno precedente) e dalla fase di affiancamento è quella di un'apparente suddivisione degli studenti in tre livelli: un primo gruppo che dimostra vivo interesse per la materia ed attiva partecipazione a tutte le attività proposte in classe o lasciate per compito a casa con spunti di riflessione o approfondimento personali; un secondo gruppo nel quale la partecipazione è attiva e proficua, ma più finalizzata e circoscritta all'operato scolastico; un terzo gruppo che richiede invece di essere stimolato più dappresso, che dimostra comunque interesse per le attività proposte di libera costruzione del pensiero e sul quale agisce forse come freno inibitorio una scarsa costanza nella fase di rielaborazione personale della conoscenza, che ne rende il tessuto un po' frammentario e poco elastico a riadattarsi spontaneamente di fronte a situazioni nuove. Sono state per questo molto utili in questo contesto sia la spiccata attitudine di una parte della classe (quella che ha seguito sin dal primo anno il curriculum PNI) alla sperimentazione di metodologie di lavoro (di gruppo e non) anche non convenzionali, sia la capacità di adattamento dei nuovi studenti, che hanno da subito permesso di superare residui problemi di adattamento o di omogeneità tra le diverse componenti. È da aggiungere in questo che la predisposizione di un percorso attraverso schede di lavoro e gruppi di discussione è stata non solo di vitale importanza per la cura di quegli aspetti propri dell'interazione sociale dichiaratamente contenuti nel POF della scuola, ma anche in vista del raggiungimento di quegli obiettivi disciplinari, che costituiscono materia nuova di studio per alcuni (almeno nell'ambito della scuola superiore) e di approfondimento o analisi sotto un'ottica diversa per altri. La presenza in ciascun

gruppo di alunni provenienti da entrambe le esperienze curricolari ha altresì permesso lo sviluppo di discussioni più ricche e la produzione di elaborati criticamente più completi, frutto di sintesi ed autonoma mediazione.

Per quanto riguarda la situazione di partenza della classe da un punto di vista dei pre-requisiti o delle misconcezioni, questi sono stati indagati attraverso un questionario iniziale<sup>6</sup>, somministrato in due momenti successivi all'interno di uno stesso incontro della durata di un'ora: nella prima mezzora si sono invitati gli studenti a rispondere a domande aperte inerenti temi disciplinari centrali nel progetto, nella seconda mezzora, viceversa, gli stessi temi sono stati proposti sotto forma di altrettante domande a risposta multipla. Scopo dichiarato di questa distinzione è quello di indagare sia la padronanza (o meno) di alcuni concetti essenziali, che le abilità e le proprietà linguistiche dei singoli, al fine di progettare un adeguato ambiente di insegnamento-apprendimento, che consenta l'evoluzione dei sensi personali degli studenti verso i significati istituzionali. L'ambiente così costruito è di chiara impostazione *vigotskiana*, per l'attenzione data alle dinamiche di interazione sociale in classe e per l'importanza attribuita agli strumenti come mediatori nei processi di insegnamento-apprendimento.

Entrando nel merito delle risposte date, l'impressione che emerge soprattutto dalla prima parte dell'elaborato (a domande aperte) è quella di un tentativo da parte della maggior parte degli studenti di riprodurre una brutta copia di definizioni o concetti (fisici o matematici indistintamente) altrove sfiorati o carpiri, senza che vi siano originalità o precisione proprie di una intima e personale padronanza dei concetti. Localmente sono presenti metafore legate ad aspetti percettivi dell'idea di periodicità<sup>7</sup>, che pare però legata per lo più ad un qualcosa di vago ed indeterminabile in quanto infinito (es. : *“una legge periodica è una legge che ha come variabile il tempo, ma che risulta infinita e quindi con termini indeterminati”*). Non compare in nessun elaborato la peculiarità del periodo come elemento contenente tutta l'informazione rilevante di un fenomeno. A conferma delle difficoltà anche eminentemente linguistiche, compaiono negli elaborati affermazioni non prive di un contenuto di verità, espresse in un linguaggio che delega i concetti ad altri più o meno implicitamente assimilati (es. : una legge periodica è *“qualcosa che ha sempre lo stesso ritmo”*) oppure nelle quali coesistono elementi linguistici dissonanti (es. di fenomeno periodico: *“le onde di un suono che vengono rilevate da un radar ogni tot”*). Confrontando queste risposte con quelle nelle quali viene richiesto di esprimere lo stesso concetto attraverso l'impiego di grafici, emerge con chiarezza una maggiore padronanza del linguaggio iconico rispetto a quello verbale: molte delle rappresentazioni fornite di andamenti periodici sono fundamentalmente corrette, con periodo dichiarato o individuabile. Discorso analogo può essere sviluppato per i temi proposti e legati ai concetti di traiettoria e legge oraria: una buona parte degli studenti dimostra di non possedere il concetto di legge oraria come funzione (con variabile indipendente il tempo), avendone piuttosto un'idea algebrica statica, legata alle equazioni e alle variabili come incognite aventi tutte lo stesso statuto.

Per quanto riguarda le domande a risposta multipla (con una sola possibilità di scelta corretta), si nota una sostanziale simmetria nelle problematiche sin qui esposte: laddove sia richiesta una stretta comprensione del testo di domanda e risposta, sono compiute scelte contraddittorie, essenzialmente legate ad una difficoltà di riconoscere all'intuizione una sua adeguata rappresentazione linguistica, cosa che tende a non manifestarsi nelle questioni poste o supportate da grafici di funzioni messi a confronto. A seguito dell'analisi di tutti gli elaborati, sono stati discussi collegialmente con la classe i casi emersi, raggruppati per casistiche (questioni disciplinari che dovrebbero essere già state altrove acquisite; questioni linguistiche legate alla scarsa chiarezza o all'impiego di forme fatte e decontestualizzate) e si è proposta una prima riflessione sul termine *periodo* a partire dal suo etimo e dai possibili sinonimi presenti nel dizionario. Di particolare rilievo sono stati i momenti nei quali, individualmente, è stato richiesto ad alcuni studenti di motivare o riproporre con altre parole le affermazioni scritte. In questa fase sono emerse in tutta la loro complessità le questioni linguistiche di cui ho discusso in precedenza: non di rado le affermazioni risultavano poco chiare al resto della classe e difficile diventava allora proporre una descrizione verbale alternativa del concetto, pure facendo riferimento ad esempi di tipo non grafico. Sembra che il procedimento di formalizzazione delle conoscenze in linguaggio passi per

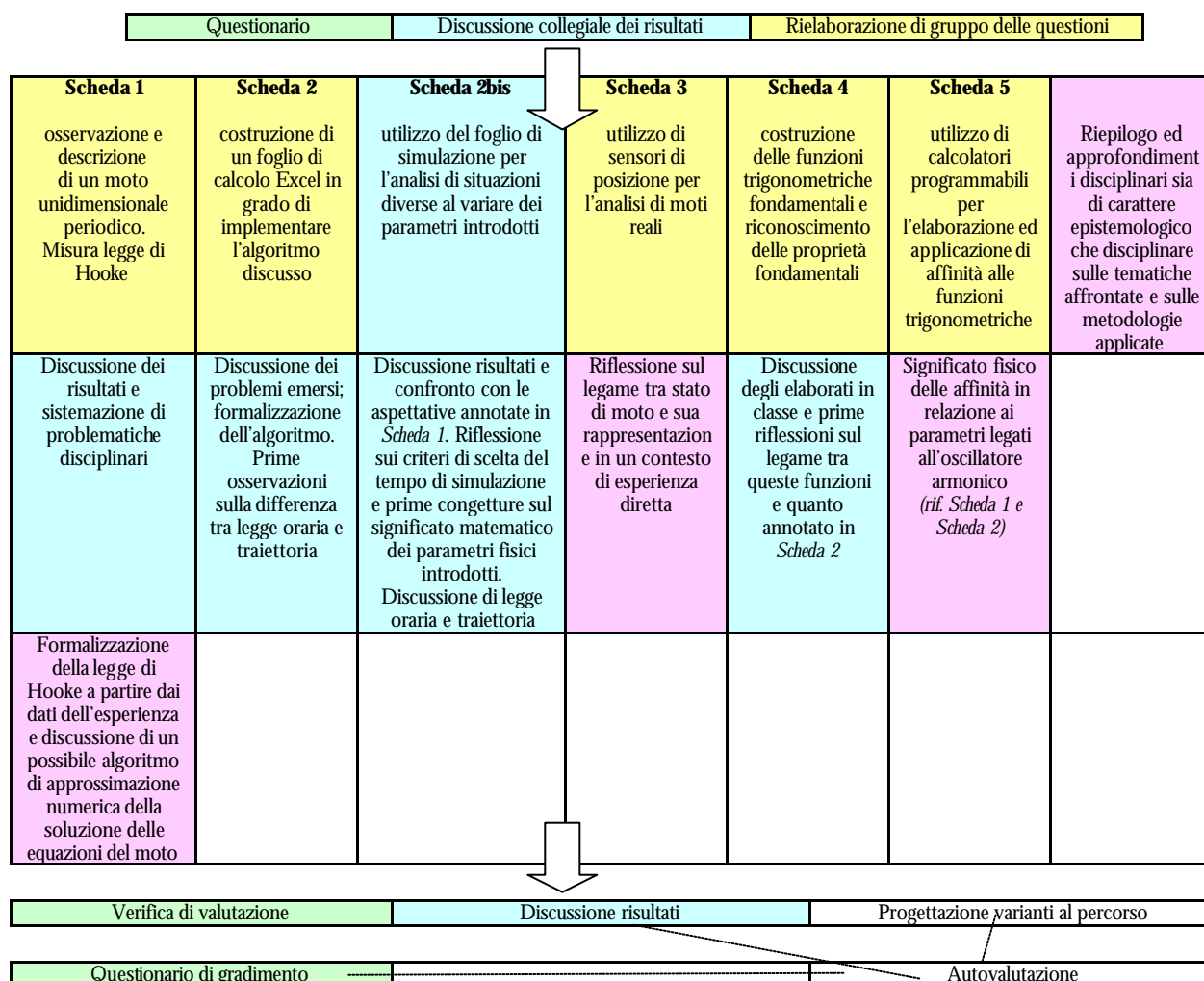
---

<sup>6</sup> Da questo momento in avanti, salvo diversa indicazione, per i dettagli delle schede proposte e relativa analisi dei risultati si rimanda il lettore alla sezione Allegati.

<sup>7</sup> Vengono utilizzati verbi come *proseguire, oscillare, prolungare* ecc.



L'elemento ellittico<sup>8</sup> intruso tra le parti è da intendersi correlato con ogni singola componente del percorso e rappresenta il nucleo educativo centrale ed insieme la cifra più profonda dell'intero progetto.



Ogni singola fase<sup>9</sup> (*colonna*) si incentra generalmente su una scheda di lavoro appositamente progettata, nella quale gli studenti sono invitati ad operare singolarmente o per gruppi, producendo elaborati che vengono poi analizzati e discussi collegialmente negli aspetti più rilevanti emersi.

Questo permette, da un lato di mettere di volta in volta a posto questioni disciplinari ancora irrisolte, dall'altro di amalgamare esperienza e conoscenza, rendendo tutti partecipi di un unico, identico percorso. Ciò può richiedere, come nel caso del questionario iniziale, successive fasi di riflessione e rielaborazione da parte degli studenti (solitamente di gruppo), oppure lasciare direttamente spazio a momenti di lezione dialogata, nei quali gli elementi cognitivi emersi sono sottoposti ad una sistemazione più formale, propedeutica allo svolgimento delle attività previste nella fase successiva.

Come chiaramente indicato dallo schema precedente, l'intero progetto può essere scorporato in tre parti principali e precisamente individuate da una preliminare raccolta di informazioni sullo stato della classe, arricchita dalle osservazioni maturate nel corso del tirocinio dell'anno precedente, dal successivo sviluppo del *corpus* disciplinare vero e proprio (secondo una scansione didattica concordata con l'IDC ed adattata in corso d'opera alle nuove istanze manifestatesi) e da una fase conclusiva di valutazione ed

<sup>8</sup> volutamente ellittico ad indicare un certo possibile scarto tra i due poli, quello *fisico* sulla sinistra e quello *matematico* sulla destra, riconciliabile sia per mezzo di attività di riflessione gestuale, che di riflessione epistemologica sui contenuti dei linguaggi iconici (rappresentazioni grafiche, diagrammi di corpo libero ecc.) e simbolici (modelli matematici e manipolazione di formule)

<sup>9</sup> *legenda dei colori* giallo? attività di gruppo; verde? attività individuale; azzurro? discussione collegiale; rosa? lezione dialogata

autovalutazione nella quale concorrono tutte le componenti significative del percorso intrapreso, nonché due questionari conclusivi appositamente predisposti.

È bene tenere comunque presente che, specie per quanto concerne la valutazione *in itinere*, possono ritenersi momenti cruciali le analisi condotte sugli elaborati dei ragazzi e le conseguenti discussioni in classe, fornendo questi un indice reale dell'avanzamento della conoscenza e della progressiva presa di coscienza da parte del gruppo (e, nelle sue sfumature, dei singoli) intorno ai temi proposti.

Ciò ha spesso fornito spunto per la correzione o la variazione di schede predisposte in anticipo e in seguito opportunamente rielaborate per integrare, espandere o presentare sotto una diversa luce gli argomenti.

## **Analisi del percorso**

Attraverso la proposta del lavoro di gruppo contenuto nella *Scheda 1* si vuole costruire un contesto di apprendimento che permetta di sviluppare un'analisi critica di un fenomeno fisico che, da considerazioni legate all'esperienza, proceda verso una progressiva descrizione matematica dello stesso attraverso l'individuazione di parametri significativi. È questo il primo necessario passo per l'introduzione di questioni legate alla periodicità dei moti ed alla loro descrizione matematica all'interno di un contesto fortemente connotato dall'esperienza diretta e dal coinvolgimento degli studenti nella formulazione e validazione di ipotesi di lavoro in gruppo e singolarmente.

L'ambiente d'apprendimento che si è deciso di costruire si colloca a metà tra quello classico di una classe e quello di un rudimentale laboratorio di fisica. Volutamente si è qui deciso di tralasciare l'impiego di strumenti o tecniche *raffinate* per l'indagine del fenomeno, cosa che avrebbe inevitabilmente spostato il problema sullo sviluppo di competenze tecniche di tipo prettamente strumentale, a meno di gestire l'intero sistema di acquisizione/elaborazione dati come una sorta di scatola nera in grado di fornire output numerici se sottoposta in qualche modo all'analisi di un fatto di natura.

Si è così collocato in classe un rudimentale stativo metallico con una molla e dei pesi. Altre molle e pesi sono stati messi a disposizione degli studenti, quali parti del discorso liberamente gestibili.

La scheda è per questo concepita per punti, ovvero per *temi* da sviluppare attraverso l'impiego di un linguaggio non formalizzato a priori: non dissimile è questa situazione dalla redazione, in ambito umanistico ad esempio, del commento ad un'opera d'arte, avendone innanzi una buona riproduzione, senza l'ausilio di grammatiche, manuali o biografie dell'autore. Si tenta di lavorare sui sensi, sviluppando una riflessione su di essi e cercando di coordinare espressione ed osservazione, rimandando ogni rigoroso inquadramento storico/disciplinare ad un momento successivo, nel quale sia possibile fare direttamente appello ad un vissuto comune di tutta la classe. Tali intendimenti sono esplicitamente dichiarati agli studenti e puntualmente richiamati e precisati ad ogni successiva introduzione di qualche nuova attività: ciò (è auspicabile) ha anche il compito di smarcare la proposizione di certe esperienze nella fisica del liceo dall'impressione di doveroso ossequio alla tradizione, all'arcadia della scienza.

Focalizzando l'attenzione più sul metodo che sulla sua parvenza ed esplicitando apertamente tale approccio, credo sia possibile motivare alla scoperta e costruzione della conoscenza agendo su sentimenti di curiosità, gioco, sfida intellettuale, che pongono in secondo piano il contesto occasionale, ponendosi piuttosto come atteggiamenti mentali in grado di adattarsi a situazioni nuove, richiamando e rielaborando (per affinità o contrasto) contenuti di conoscenza pregressi.

La scheda presenta una intrinseca simmetria nello sviluppo dell'analisi del fenomeno: la prima parte lascia una sostanziale libertà nell'approccio al fenomeno, mentre via via che si procede è richiesta maggiore attenzione intorno ad aspetti particolari che potrebbero essere stati inizialmente tralasciati e che invece val la pena di focalizzare con cura. Ciò, per quanto è stato possibile osservare nel corso degli incontri, ha talvolta innescato meccanismi di parziale revisione di affermazioni sostenute inizialmente da singoli o gruppi di lavoro, producendo per questo un meccanismo di *feed-back* del processo di conoscenza e scoperta, segnalato in fase di discussione collegiale come uno dei momenti più fertili dell'approccio scientifico. Le istanze, poste soprattutto nei termini di un linguaggio sempre più specifico e connotato, non hanno, a mio avviso, avuto mai carattere invasivo: l'impiego di grafici per la descrizione sintetica di andamenti, ad esempio, ha fatto direttamente appello a quella familiarità

(manifestata già nel questionario) con questo strumento linguistico, mentre i suggerimenti a considerare con maggior attenzione ora un aspetto ora l'altro e gli inviti alla riflessione hanno per lo più costituito spunti, non essendo mai state indicate vie "preferenziali", finalizzate ad una rapida convergenza verso un sapere istituzionalizzato. In tal senso, vale qui la pena di osservare come l'idea di investigare numericamente il fenomeno di allungamento per trarne qualche informazione, si sia manifestata in un gruppo ben prima della consegna degli ultimi punti della scheda. Il tentativo, pur retaggio di precedenti frequentazioni del laboratorio di fisica, è stato motivato come la volontà di giungere alla determinazione della forza della molla e ricollegarla in qualche modo alla velocità.

L'analisi degli elaborati ha messo in luce come l'utilizzo della lingua corrente per la descrizione del fenomeno sia stato sviluppato da pochi ed in maniera piuttosto succinta, per lo più facendo riferimento a conoscenze pregresse, più o meno formalizzate ed interiorizzate. Se per quanto riguarda il primo aspetto la cosa è abbastanza naturale (e risiede nella peculiarità di ogni linguaggio "*che difficilmente riesce ad esaurire con uguale concisione, efficacia e semplicità qualsiasi contenuto di conoscenza...*"<sup>10</sup>), il secondo punto pone in risalto una questione già emersa dallo spoglio dei questionari iniziali e precisamente la scarsa attitudine all'osservazione di un fenomeno senza averne avuto una spiegazione preliminare.

Il radicarsi di tale atteggiamento è spesso più dannoso per l'individuo che non per lo studente, il quale anzi può non di rado fregiarsi di una brillante carriera scolastica, pagata al prezzo della propria fantasia ed originalità. A ciò si aggiunga che per molti le imprecisioni nello svolgimento della consegna sono coincise proprio con l'utilizzo (formalmente errato) di termini o contenuti mutuati da un incerto sapere di riferimento. È in questo senso utile citare un caso, riproposti in modo più o meno esplicito, in alcuni elaborati nei quali si fa riferimento a quattro forze presenti nel sistema: la molla, la resistenza dell'aria, la forza peso e la massa. Non è forse singolare che qui la discussione sia stata in molti casi preceduta dallo schizzo di un diagramma di corpo libero del sistema, per lo più privo di un sistema di riferimento e con una forma piuttosto eterogenea di esplicitazione dei vettori (vi compaiono con pari dignità l'*accelerazione* gravitazionale e la *forza* elastica della molla). Ecco quindi che, attribuendo alla *gravità* (senza ulteriore specificazione) lo statuto di forza, ed includendo (senza averla mai indicata) l'attrito dell'aria... può capitare di sentire l'esigenza di attribuire un ruolo dinamico anche alla massa nuda e cruda, cosa che, a mio avviso, sarebbe stata presumibilmente scongiurata attraverso una corretta costruzione del diagramma di corpo libero. Ritengo questo esempio estremamente significativo di una manipolazione simbolica condizionata da schemi concettuali, di cui si ha scarsa padronanza e che vengono applicati identicamente di situazione in situazione, facendo riferimento solo alla situazione "più simile" già incontrata in passato. Lo stesso ruolo della forza di attrito, che mai viene indicata e sempre dichiarata, è matrice di una chiara tendenza a non *vedere* la realtà, ma il suo modello riconciliando poi lo scarto tra le due cose attraverso l'introduzione di un generico termine onnicomprensivo, non di rado percepito piuttosto come *imprecisione* della natura (scabrezza della superficie, turbolenza del fluido ecc.) che non grado di complessità del mondo. Pur non essendo stato possibile indagare sino in fondo quest'ultimo aspetto per ovvie ragioni di tempo, sarebbe interessante proporre in futuro, in qualche classe, una riflessione proprio incentrata sulle forze di attrito e sulla loro descrizione, collocando quindi da subito il progetto al di fuori di una convenzionale proposizione di esperienze tradizionalmente concepite ad hoc.

Altra problematica che si è scopertamente manifestata è quella legata al *segno* delle quantità cinematiche osservate, aspetto questo che si è criticamente posto nei gruppi all'atto di tracciare gli andamenti temporali di posizione, velocità, accelerazione. Per molti si è data una iniziale confusione tra posizione e spazio percorso, per lo più superata in fase di elaborazione attraverso il nostro intervento *super partes* nella conversazione. Di più delicata trattazione è quello legato ai concetti di velocità ed accelerazione, forse perché meno direttamente riconducibili ad una esperienza sensoriale diretta. È stato per questo necessario ricorrere soprattutto alla fase di discussione alla presenza dell'intera classe, nella quale si sono raccolte le proposte di lavoro più significative (non necessariamente le più corrette da un punto di vista disciplinare) e si sono poste al vaglio dell'opinione di tutti. Ciò ha permesso di recuperare e discutere alcune nozioni di base (sia fisiche che matematiche) e di fornire materiale per la costruzione di esemplificazioni in grado di rendere *sensate* le assunzioni di volta in volta concordate.

---

<sup>10</sup> E. Cassirer, *Filosofia delle forme simboliche*

Come si può evincere, da questa fase emerge una difficoltà abbastanza risaputa nell'ambito della fisica e precisamente quella legata al carattere *vettoriale* delle grandezze considerate. L'utilizzo di moti unidimensionali, che alla lunga rischia di mascherare la questione di fondo, ha in realtà dimostrato come la manipolazione dei grafici (e quindi delle grandezze considerate) sia stata condotta di primo acchito attribuendo ovunque proprietà che potremmo definire genericamente *scalari*. Inizialmente, in molti gruppi era stato riprodotto un andamento oscillante nel tempo intorno all'asse delle ascisse, sulla scorta più di una pura analogia visiva col moto compiuto dalla massa che non di una reale percezione del carattere intrinsecamente descrittivo di quella rappresentazione. Ne è prova la pronta ritrattazione (causata da un blocco *sensoriale* più che *cognitivo*) di quasi tutti i gruppi di fronte alla richiesta di motivare simili andamenti anche per la velocità, che sarebbe così stata *negativa*. Il momento conclusivo di questa prima fase di discussione è stato la costruzione alla lavagna dei tre andamenti "simultaneamente", ovvero procedendo a considerare posizione, velocità, accelerazione del sistema "istante per istante" e quindi recuperando le diverse informazioni che le tre quantità cinematiche portano di volta in volta con sé e discutendo come la scelta di un diverso sistema di riferimento (spazio-temporale) avrebbe semplicemente condotto ad andamenti diversi nell'apparenza, ma non nella sostanza. È stato quindi possibile innestare direttamente su questo punto la costruzione dell'equazione del moto descrittiva del fenomeno osservato, a partire da semplici rilievi sperimentali (condotti con l'ausilio di carta, penna e righello) circa la curva forza-distanza della molla. L'andamento lineare è diventato subito bagaglio di tutti, non tanto attraverso la costruzione alla lavagna del grafico dei punti sperimentali, ma piuttosto grazie ad una certa familiarità a trattare le differenze finite. La discussione vera e propria si è aperta sulla forma da dare alla legge trovata e, ancora una volta, oggetto della discordia è stato un *segno*, visto che ad alcuni risultava nota da esperienze passate la forma istituzionale della legge di Hooke. Il problema è stato inizialmente affrontato attraverso un dibattito in classe, volto a raccogliere motivate proposte di soluzione, a validarle o confutarle. A ciò si è fatta seguire una prima semplice elaborazione formale che, mettendo assieme tutte e sole le informazioni ricavate dall'esperienza diretta, ha permesso di ricavare la corretta equazione del moto ed impostare così il lavoro di simulazione successivo. Nel corso di questa elaborazione si è tra l'altro potuto riflettere, in termini operativamente convincenti, sulle grandezze effettivamente coinvolte nel moto dell'oscillatore, in particolare è stato possibile formalizzare una evidenza emersa sin dalle prime osservazioni sperimentali, e precisamente il ruolo di privilegio che ha il punto di equilibrio del sistema nell'intero svolgimento del fenomeno: ripercorrendo passo passo il moto lungo una singola oscillazione, si è così potuto, a partire dai singoli aspetti *dinamici* trovare un sensato convincimento sugli andamenti *cinematici* osservati. È questo, a mio avviso, un altro punto cruciale di convergenza più del metodo che del contenuto disciplinare: l'abilità di tenere sotto controllo uno stesso fenomeno da più punti di vista e legarli vicendevolmente al fine di trovare *sentato* il modello che si è costruito.

Con queste premesse ci si è dedicati alla *Scheda 2*, la cui stesura ha richiesto di ritornare più volte sui modi, ove non esplicitamente sulle intenzioni. Inizialmente si era pensato di far svolgere il lavoro di simulazione attraverso l'impiego del linguaggio C di programmazione, magari in ambiente Matlab. Questa ipotesi, pure consistente con il piano curricolare PNI, avrebbe però creato complicazioni informatiche (soprattutto legate alla gestione delle librerie grafiche) che avrebbero però rischiato di distogliere l'attenzione dal cuore centrale del progetto. Si è così optato per l'impiego del foglio di calcolo Excel. L'attività che è stata proposta consta di due momenti principali: una fase preliminare dedicata alla formattazione del foglio ed alla raccolta di conseguenti osservazioni/spunti (*Scheda 2*), ed una successiva (*Scheda 2bis*) di utilizzo "guidato" della simulazione, per la produzione di congetture legate all'incidenza dei vari parametri coinvolti (massa, costante elastica, tempo di simulazione ecc.), per il raffronto dei risultati ottenuti con l'esperienza ed il riconoscimento di quelle grandezze (periodo, ampiezza, fase), caratteristiche delle funzioni armoniche. Entrambe le attività sono state svolte nel laboratorio di informatica e sono state precedute da un breve momento introduttivo.

La prima attività su foglio Excel è stata svolta in gruppi che, per quanto possibile, rispettassero la struttura di quelli originari. Il materiale contenuto nella scheda aveva il compito di illustrare una possibile modalità di realizzazione della simulazione, presentando un'ipotesi di organizzazione per colonne di dati campione e richiamando le formule principali discusse a lezione. Si è suggerito agli

studenti di effettuare costantemente un controllo “manuale” dei risultati, via via che procedevano nella costruzione del foglio di calcolo: per molti gruppi ciò ha coinciso con una preliminare fase di calcolo a partire dai dati campione, che fosse convincente del modello di formattazione proposto. L’attività non ha presentato difficoltà informatiche di rilievo ed è stata per lo più transitoria verso la vera e propria simulazione (*Scheda2bis*). In questa seconda fase, si è suggerito ai gruppi un lavoro per punti, consistente nello svolgimento di simulazioni a partire da diverse condizioni iniziali e nell’esplicitazione di congetture intorno agli andamenti grafici ottenuti. In pratica, questo momento si configura idealmente come il duale dell’osservazione sperimentale, attraverso l’esplorazione del modello costruito ed il successivo confronto con le ipotesi maturate dall’esperienza diretta. Oggetto di riflessione sono gli andamenti di accelerazione, velocità e posizione, il periodo, la sua dipendenza dalla massa e dalla costante elastica della molla, il comportamento della simulazione al variare della sua durata complessiva e dell’intervallo *infinitesimo* prescelto. La valenza di questa fase è quindi duplice, contenendo spunti sui metodi d’indagine dei limiti di un modello, che trascendono l’occasionale applicazione al moto di un oscillatore. Analizzando gli elaborati dei singoli gruppi, emerge una maggiore capacità di descrizione del fenomeno attraverso la lettura dei grafici, mentre ancora un po’ povera o male articolata è la motivazione fisica di tali evidenze, talvolta ancora troppo arroccata sulla sterile proposizione del solito sapere istituzionale. Complessivamente, viene recuperata sia la dipendenza (diretta) del periodo dalla massa che quella (inversa) dalla costante elastica della molla, viene sottolineata l’identità del periodo in tutti e tre gli andamenti (elemento che era già stato oggetto di discussione nelle precedenti lezioni) e correttamente si fa riferimento alla dipendenza dell’affidabilità del modello dalla durata dell’intervallo minimo di simulazione e dal numero di iterazioni considerate (“una buona procedura per avere risultati *“sensati”* è considerare un intervallo di tempo molto piccolo e prendere in considerazione un notevole numero di dati”). Tale scelta viene occasionalmente motivata facendo riferimento all’idea stessa sottesa al modello (“è necessario porre un intervallo di tempo breve perché altrimenti il nostro sistema considererebbe il moto della molla uniformemente accelerato mentre in realtà passa da un minimo ad un massimo”). Come si nota, in quest’ultima annotazione, a parte l’utilizzo improprio del termine *sistema*, il linguaggio utilizzato risente ancora di una non perfetta aderenza tra la corretta intuizione (sperimentale o intellettuale) e la sua descrizione formale. Al termine di questa attività di laboratorio, si è, come di consuetudine, fatta seguire una lezione dialogata, nella quale si sono portate in discussione le tesi più significative tra quelle emerse e si sono proposti degli approfondimenti. Particolare riguardo è stato dedicato agli aspetti matematici, nonché fisici, del modello proposto. Si è innanzi tutto cercato di precisare in che termini l’intervallo dovesse esse essere scelto in relazione alla durata dell’intera simulazione: si è fatto direttamente osservare come, anche nel caso di intervalli piccoli, per simulazioni sufficientemente lunghe si riscontra il fenomeno di divergenza delle oscillazioni osservato. Questo aspetto ha avuto lo scopo di focalizzare maggiormente l’attenzione degli studenti sul significato di periodo, come elemento minimo, portatore di tutta l’informazione necessaria. È infatti impressione abbastanza evidente dagli elaborati che, anche laddove sia stato chiaramente messo in luce il nesso tra affidabilità del modello e scelta dei parametri di simulazione, la preoccupazione maggiore si sia incentrata non sull’accuratezza con cui viene risolto l’andamento temporale della funzione all’interno del singolo periodo, quanto sulla possibilità di riprodurre un numero (anche considerevole) di oscillazioni senza distorsione. Se ciò porta comunque ad una corretta raccolta di informazioni nell’ambito delle prime oscillazioni complete, rappresenta però un approccio ridondante che, nell’ambito di modelli più complessi, rischia di comprometterne l’effettiva applicabilità. Da un punto di vista strettamente matematico, invece, la discussione ha dato modo di introdurre, in maniera del tutto qualitativa, l’idea di approssimazione locale di una curva attraverso un’espressione polinomiale (di secondo grado). Confrontando a questo punto le due possibili motivazioni del modello (quella fisica più *sensata* e quella matematica più *formale*) è stato possibile congiungere l’esperienza in un contesto formale di più ampio respiro e, al tempo stesso, proporre una chiave di lettura della matematica di più ampio respiro all’interno delle scienze empiriche-sperimentali, non di rado in grado di suggerire la corretta soluzione di un problema, prima di averne ottenuto una sua rigorosa e formale dimostrazione. È stata qui infine ripresa la trattazione del problema legato alla distinzione tra legge oraria e traiettoria, riflettendo sul moto dell’oscillatore lungo la verticale e sulla descrizione fornita dai grafici della simulazione riguardanti la dipendenza della posizione dal tempo.

La discussione collegiale ha assodato come risulti ormai piuttosto evidente che la descrizione fornita dai grafici sia qualcosa di intrinsecamente diverso rispetto al moto reale lungo la verticale. Si è perciò pensato di inserire a questo punto un'attività, da svolgersi nel laboratorio di fisica ed organizzata al solito per gruppi di lavoro e riflessione, avente scopo prettamente di esperienza sensoriale, che ponesse gli studenti nella situazione speculare rispetto a quella della *Scheda 2* non più interpretazione dei grafici alla luce del fenomeno fisico che sottendono, ma *improvvisazione* di un fenomeno fisico in grado di essere descritto da certi predefiniti andamenti funzionali (*Scheda 3*). Il lavoro (che per il gruppo di studenti PNI costituisce la proposizione, in un ambito diverso e con finalità diverse, di esperienze con sensori di posizione svolte già il primo anno) si articola in due momenti: una prima fase esplorativa del comportamento dei sensori relativamente ai loro cambiamenti di posizione ed al modo in cui tali cambiamenti sono visualizzati dalla traccia sul calcolatore ed una seconda nella quale, sulla scorta della discussione di gruppo sul funzionamento del sistema, si richiede di riprodurre atti di moto in grado di essere descritti da semplici andamenti funzionali nel tempo. Dato il contesto prettamente esperienziale, non viene qui fatta richiesta di alcun elaborato scritto, ma, lavorando su concetti già altrove fissati nel corso del progetto, l'attività si fonda prettamente sulla pratica col sensore ed il dibattito comune al termine di ogni fase. L'osservazione condotta e la continua interazione con i gruppi, rinforza l'impressione di una maggiore familiarità degli studenti con i problemi trattati, proprio in virtù del tessuto d'esperienza comune creato all'interno degli ambienti d'apprendimento sin qui appositamente predisposti. Con questa attività può ritenersi esaurita la prima fase esplorativa della periodicità legata al moto. Le attività successive (*Schede 4 e 5*) sono state quindi mirate alla formalizzazione matematica del problema. Si è innanzi tutto scelto di costruire una scheda di lavoro (*Scheda 4*) che, pur non essendo esplicitamente basata sull'osservazione sperimentale di un fenomeno, si richiamasse, almeno implicitamente, ad una situazione concreta (nella fattispecie il moto uniforme di un punto su una circonferenza di raggio unitario). Pur avendo predisposto un "percorso" di riflessione attraverso gli aspetti significativi del problema (centrati sul concetto di radiante e sulla costruzione delle funzioni trigonometriche elementari), si è deciso a questo punto di lasciare una maggiore libertà nell'uso esplorativo dei diversi linguaggi. L'analisi degli elaborati indica chiaramente il privilegio accordato alla produzione grafica (occasionalmente ancora un po' involuta) ed alla descrizione non formalizzata del fenomeno. In quest'ultimo caso, però, l'assenza di chiare reminiscenze mutuata dal precedente curriculum di studi, evita la presenza di inefficaci zeppe disciplinari, permettendo anzi di cogliere sprazzi di precisa originalità<sup>11</sup>. È qui data l'occasione di riflettere insieme con gli studenti sul diverso grado di precisione formale che essi dimostrano nella produzione di elaborati al calcolatore (specialmente grafici) e quella dimostrata con "carta e penna". Non si tratta meramente di una qualità estetica, quanto di sostanza: la mediazione del mezzo informatico sembra infatti ripristinare certi automatismi scontati che vengono riconosciuti solo a posteriori. Esempi tipici e più semplici in tal senso sono l'indicazione di una scala sugli assi cartesiani, o di una freccia indicante il verso positivo e così via. Da quanto è dato di capire dalla discussione con i singoli studenti, sembra dominare nell'uso del linguaggio (anche matematico) l'impulso ad una verosimiglianza, tentativo di pura aderenza all'istintiva prima intuizione, pure a scapito di quelle strutture minime del linguaggio (formale o parlato) già acquisite e riconosciute come tali. È essenzialmente sulla scorta di questa impressione e per indagarla più a fondo che si è pensato di costruire l'unità di lavoro successiva (*Scheda 5*) sotto forma di lezione dialogata, lasciando libero uso agli studenti delle calcolatrici programmabili in dotazione: ciò ha permesso così di compiere *in fieri* una piccola analisi intorno a quel nodo, cruciale per ogni studente, che è il processo *di ricerca e apprendimento*, cui più direttamente la sfera linguistica è pertinente.

Da un punto di vista strettamente disciplinare, questo intervento in classe ha lo scopo di riconciliare in seno alla matematica le questioni sin qui esposte in merito alla periodicità ed ai moti periodici.

In particolare, avendo finalmente a disposizione le funzioni seno/coseno, se ne sono discussi i grafici al variare di periodo (frequenza), ampiezza e fase, evidenziando di volta in volta, attraverso una discussione collettiva, il significato fisico dei diversi parametri e dando quindi interpretazione degli andamenti sinusoidali trovati sia nella fase di esplorazione sperimentale (*Scheda 1*) che di simulazione al calcolatore (*Scheda 2 e 2bis*). Cenni di analisi dimensionale nel corso della lezione (inizialmente non

---

<sup>11</sup> In un elaborato, ad esempio, si fa riferimento al punto come "intersezione tra la circonferenza e la retta individuata dall'angolo"

previsti, ma ispirati dall'intervento di uno studente) hanno altresì permesso di suggerire un modo più rigoroso per dedurre una dipendenza formale del periodo dalla costante elastica della molla e dalla massa dell'oscillatore. Quanto osservato in precedenza in merito all'influenza del calcolatore sulla qualità degli elaborati ci è stato qui confermato dal tipo di interventi e congetture proposte dagli studenti. Pur non fornendone una formale dimostrazione, ad esempio, è stato per molti naturale giungere ad una relazione per il periodo di  $\sin(nx)$ , lavorando su semplici esempi numerici. Analogo discorso per quanto riguarda lo sfasamento tra  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$ .

Conclusioni quantitative di questa portata si erano avute solo nell'ambito della pratica di laboratorio con Excel, a riprova di quanto già evidenziato: *lettura e scrittura, intuizione ed elaborazione*, sono attività mutuamente correlate, ma che non si sviluppano necessariamente allo stesso livello e nelle quali la seconda si fa piuttosto garante della prima. Laddove, infatti, i gruppi (nel complesso o nelle qualità isolate del singolo) sono stati in grado di *scrivere o descrivere a voce* con sufficiente precisione i contenuti del loro pensiero, non è venuta a mancare neppure un'adeguata capacità di interpretare testi, grafici o altro materiale sufficientemente formalizzato, viceversa, in non pochi casi, si è osservato che l'impiego dello strumento informatico ha permesso di colmare lo scarto tra intuizione ed elaborazione, permettendo di giungere ad una lettura dei fenomeni che va ben oltre una loro approssimativa quanto sterile descrizione.

A questo punto del progetto, di comune accordo con l'IDC si è pensato di lasciare spazio ad alcune lezioni di carattere più operativo, nelle quali svolgere i primi esercizi nei quali sono coinvolte funzioni trigonometriche e le loro proprietà, recuperando occasionalmente, su richiesta della classe, quegli aspetti linguistici o formali rimasti poco chiari, raccogliendo, al contempo, suggerimenti per un'ultima lezione di riepilogo e approfondimento di alcune tematiche più curiose legate alla periodicità, prima del questionario di valutazione finale. In tal senso è andata maturando l'idea di impiegare un paio d'ore conclusive per una lezione dialogata, in laboratorio di informatica, che, discutendo ulteriormente il legame tra legge oraria e traiettoria del moto, permettesse (visto il carattere PNI del curriculum di studi) di sviluppare il discorso con cenni alla grafica per internet (Flash) ed ai linguaggi di programmazione ad oggetti (Java). Pur non essendo queste tematiche esplicitamente presenti nel piano di studi, la classe ha dimostrato curiosità ed interesse nei confronti di questa diversa applicazione della matematica (al di fuori dell'ambito scientifico tradizionale): alcuni hanno anzi accennato all'uso durante le elementari del programma LOGO, per far compiere semplici movimenti predefiniti (traslazioni, rotazioni) ad oggetti disegnati sullo schermo. Ad un livello più adulto, il problema del moto a partire dalle sue equazioni orarie è quanto è stato qui sviluppato in ambito Flash e Java. Da segnalare, come fatto curioso nel corso di questo incontro, il ricorso alla Fisica (alla cinematica, per la precisione) per sbrogliare alcune questioni legate ai massimi e minimi delle figure di Lissajous: nell'ambito della discussione, a fronte al grado di complessità di tali figure che scoraggiava evidentemente il tentativo di dare ad esse una forma esplicita (del tipo  $y = \dots$ ), è sorta in alcuni studenti la richiesta su come fare, al di fuori dell'impiego del calcolatore, a ricavare qualche previsione sul comportamento di tali funzioni (ad esempio prevederne i massimi/minimi). È risultato qui piuttosto intuitivo il ricorso alla cinematica e quindi alla lettura dei grafici facendo riferimento alla velocità del punto materiale che percorre quella traiettoria ed alle informazioni che la conoscenza della velocità può fornire.

## Valutazione

La fase conclusiva del progetto prevede lo svolgimento di un'attività di *valutazione* degli studenti e di nostra *autovalutazione*. Per l'occasione si sono appositamente predisposti due questionari, dei quali uno ha lo scopo di ottenere ulteriori informazioni sull'evoluzione dei processi di *insegnamento-apprendimento*, che, unitamente alle osservazioni "in situazione" raccolte *in itinere*, renda possibile una più completa formulazione di un giudizio in merito al grado di incisività del progetto nei termini in cui è stato condotto. La presenza di domande aperte si rivolge, in questo senso, ad una ultima indagine della padronanza linguistica acquisita o sviluppata dagli studenti ed alla capacità di mettere apertamente a fuoco le linee essenziali dei concetti coinvolti. Viceversa, le domande chiuse, pur non essendo elaborate dal punto di vista computazionale, hanno carattere prettamente operativo, permettendo, tra l'altro, una

valutazione di merito di tipo quantitativo. Nel complesso, sullo spirito proprio che ha animato la progettazione e lo sviluppo dei diversi moduli, il questionario proposto non contiene domande che richiedano peculiari capacità mnemoniche, indagando piuttosto se ed in che misura si siano radicati negli studenti i concetti di fondo e proprietà formali elementari. Considerando inoltre che il questionario è stato somministrato a circa un mese di distanza dall'ultimo intervento (escludendo approfondimenti ed esercitazioni), le informazioni relative risulta particolarmente pertinente fissare l'attenzione sull'effettivo possesso acquisito dagli studenti intorno ai temi trattati.

Complessivamente le domande possono essere classificate in due categorie principali:

- A) Quelle cui si può rispondere semplicemente a partire dalla conoscenza delle definizioni delle funzioni "seno" e "coseno", quindi anche senza alcuna considerazione legata alle esperienze fisiche viste durante il percorso (*domande 1,2,3,4*)
- B) Quelle cui si deve rispondere in riferimento alle esperienze viste durante il percorso o, in ogni caso, a conoscenze che riguardano la fisica (*domande 5,6,7,8*)

Tale distinzione è puramente convenzionale ed è anzi interessante cercare di correlare, sulla scorta delle risposte fornite da ogni singolo studente, i due livelli di consapevolezza maturata (*matematica e fisica*), ovvero il grado raggiunto nel far riferimento all'esperienza fisica per dare significato a concetti matematici (trigonometrici in particolare), obbiettivo dichiarato del percorso predisposto in questi mesi di lavoro. In questo senso, vista la formulazione e la natura delle domande, una naturale correlazione sussiste tra le domande *1,2,4* e *5,6*, mentre un'eventuale assenza/presenza di correlazione tra la risposta alla domanda *3* e le risposte alle domande *7,8* sembra meno significativa.

Il riscontro con i risultati del questionario sembra piuttosto suggerire una prima ripartizione in termini di domande "operative" su situazioni date (*2,4,6,7*) ed altre nelle quali la consegna richiedeva di recuperare una conoscenza o giungere ad una conclusione costruendo un ragionamento (*1,3,5,8*).

Emerge complessivamente un rendimento migliore nel primo caso, laddove minori siano le istanze linguistiche ed ancor più sia possibile sfruttare il supporto di una sicura rappresentazione grafica data dal testo. È in tal senso a mio avviso significativo che ben 6 studenti hanno saputo riconoscere ed esplicitare (pure se non ne fosse fatta esplicita richiesta) la forma analitica delle funzioni rappresentate: ciò rinforza l'impressione che la lezione legata alla *Scheda 5* abbia inciso in maniera significativa nella manipolazione simbolica delle funzioni trigonometriche fondamentali. In quest'ambito si collocano anche le risposte, sostanzialmente corrette per la maggior parte della classe, fornite in relazione alla *domanda #4*. All'interno di questo gruppo di domande, la *6* e la *7* rendono conto dell'operatività acquisita in ambito fisico: l'impressione è che a questo primo livello, le risposte degli studenti indichino una certa familiarità acquisita con le tematiche. Tuttavia, lo snodo tra le questioni fisiche e quelle matematiche, si gioca sulla *domanda #3*, fonte di errori per la maggior parte degli studenti, benché si fosse a lungo trattata la questione in seno alla *Scheda 4*. Sono portato a mettere in relazione l'insuccesso di questa consegna, con la scarsa precisione grafica, ad esempio, che si riscontra nei tentativi di risposta alla *domanda #5*, in particolare con l'assenza di chiari riferimenti cartesiani nei diagrammi di corpo libero o di etichette, scale e quant'altro nei sistemi cartesiani. Come già discusso in precedenza, sembrano questi dettagli linguistici marginali per gli studenti, che impediscono però loro una libera manipolazione delle conoscenze acquisite, vincolandoli ad attività di lettura più che di scrittura, riducendo quest'ultima ad un'approssimativa copia di formalizzazioni altrove orecchiate (come è dato appurare dall'analisi delle risposte alla *domanda #1*). Non è qui forse un caso che, dal questionario di gradimento emerga un particolare apprezzamento per l'impiego dello strumento informatico, per la simulazione o la trattazione dei dati e che anzi si siano ritenute eccessive per durata e/o più faticose le attività di osservazione sperimentale legate all'oscillatore armonico. Nell'un caso, infatti, l'impiego del software mette in secondo piano questioni che tali non sono, quali la presenza di una orientazione negli assi cartesiani, la scelta di una scala opportuna, il disegno delle curve ecc. lasciando (in apparenza) all'utente il compito di una lettura del risultato. La descrizione "a mano" dei contenuti della propria esperienza, appare invece sempre più problematica, pure lasciando libertà di utilizzo di linguaggi più o meno

formali. In alcuni casi, la buona padronanza acquisita del linguaggio formale della matematica e la percezione del suo carattere sintetico indicano il superamento di questa barriera linguistica (si pensi ad esempio agli studenti che hanno riconosciuto l'espressione analitica delle funzioni rappresentate), ma non è questo il filone maggioritario. È chiaro quindi che, comune alle tematiche della fisica o della matematica, si riproponga, diversamente contestualizzata, la questione del linguaggio, nella *domanda #5* e *#1* rispettivamente, secondo le modalità sin qui discusse.

Si può quindi procedere ad una analisi di secondo livello degli elaborati, legata alla presunta correlazione tra le domande 1,2,4 e 5,6. Lo spoglio degli elaborati indica che laddove più accurata ed articolata è stata la risposta alla *domanda #1*, si è avuto identico riscontro in merito alla *domanda #5*. Di più, in alcuni casi, sono presenti segni linguistici indicativi di un pensiero che fa riferimento all'esperienza fisica (ad es. l'utilizzo in luogo di "periodo" della locuzione "periodo di oscillazione", oppure l'esplicito richiamo alle oscillazioni compiute da un pendolo). Analogamente, a margine di alcune risposte alla *domanda #6* compaiono abbozzi di formulazione matematica (legati alle discussioni condotte in seno alla *Scheda 5*) del legame tra massa, costante elastica e periodo, che indicano l'impiego di strumenti matematici per recuperare informazioni fisiche. Tutto questo, pur nello stato larvale in cui ancora si manifesta, indica che un primo grado di incidenza è stato ottenuto attraverso il progetto, nell'erosione delle barriere disciplinari consolidate tra Matematica e Fisica. Una valutazione "numerica" è stata poi proposta all'IDC, secondo la griglia di valutazione qui presentata in allegato e tenendo conto delle sole domande chiuse e dei parametri cognitivi messi in gioco di volta in volta. Ci sembra che le valutazioni emerse siano confortanti ed indichino il sicuro raggiungimento da parte della maggioranza (57%) della classe di una soglia di sufficienza accettabile in termini di padronanza delle conoscenze formali richieste. Discorso a parte, come del resto discusso nell'ambito dell'intero progetto, riguarda la padronanza linguistica e l'accertamento, tramite essa, di una reale padronanza dei concetti e non meramente della loro sintassi. Val la pena qui di sottolineare che, tenuto conto dell'intero iter seguito dagli studenti, in molti casi la povertà linguistica è piuttosto questione di forma che di sostanza, almeno nei casi di piena sufficienza. Diverso e più delicato dettaglio è invece negli altri casi, ove andrebbe discussa nello specifico con il singolo alunno.

## **Autovalutazione e conclusioni**

L'analisi dei questionari di gradimento presenta spunti di interesse, sia alla luce dei risultati emersi in fase di valutazione degli alunni, che dell'operato nel corso del lavoro di tirocinio.

Occorre innanzi tutto distinguere le risposte per aree tematiche e precisamente: rapporto con i tirocinanti nel corso della normale attività in classe con l'IDC e poi durante il percorso di tirocinio; gradimento delle tematiche scelte e degli strumenti impiegati. All'interno delle risposte date, avendo gli studenti liberamente deciso di firmare i questionari, si possono discutere le posizioni di quelli del PNI e di quelli provenienti dal curriculum di studi tradizionale. Complessivamente la presenza dei tirocinanti nella normale attività in classe è vista come elemento non di disturbo ed occasionalmente di arricchimento delle discussioni in classe, con prevalenza della seconda posizione tra i PNI. Analogo discorso vale per la relazione instaurata durante le attività di intervento in classe: in questo caso le posizioni uniformano, essendo, d'altra parte, tale attività successiva ad un iniziale ulteriore periodo di affiancamento all'IDC. Ho avuto viva percezione di tutto ciò proprio nel corso dei miei interventi in classe, senza per questo lasciarmi influenzare ed adottare un comportamento falsato rispetto alle occasioni di insegnamento avute in passato, al di fuori del tirocinio. Ritengo di essere riuscito a conciliare all'interno del progetto non solo contenuti disciplinari, ma anche trasversali, cercando sbocchi possibili che stimolassero la creatività degli studenti, mettendoli nelle condizioni di esercitare un ruolo attivo nella costruzione della conoscenza.

Per quanto concerne la scelta delle tematiche e degli strumenti, alcuni segnalano che si è dedicato eccessivo spazio all'osservazione sperimentale dell'oscillatore armonico a scapito, ad esempio, dell'utilizzo del libro di testo e segnalano la presenza di eccessivi approfondimenti *in itinere*. In risposta a queste osservazioni vale la pena sottolineare come l'attenzione posta sull'oscillatore non fosse fine al fenomeno in sé, ma alla costruzione per gradi di un metodo sperimentale spendibile in altri campi

scientifici, nonché la volontà di approfondire questioni legate prettamente ai linguaggi (formali e non) più che strettamente disciplinari. Gli approfondimenti cui si fa cenno, si riferiscono alle discussioni in presenza dell'intera classe degli elaborati prodotti a nel corso dei lavori di gruppo: forse non si è insistito abbastanza sul senso di quegli sconfinamenti, o forse, più semplicemente, questo è anche un indice di un modo di vivere la scuola, come luogo in cui ogni parola, ogni frase pronunciata va archiviata perché sottoposta a successivo procedimento di verifica e valutazione. Ritengo che questo "malinteso" avrebbe potuto essere evitato nella costruzione di un diverso rapporto, sviluppando, ad esempio, una interazione via email, che lasciasse libertà di discussione dei temi affrontati in un ambiente diverso e meno formale. Va da sé che una simile prospettiva non può essere costruita dall'alto, ma si dà o meno spontaneamente. Da parte nostra abbiamo sollecitato più volte la cosa, senza alcun riscontro. In questo, a nostro avviso e per esperienza diretta di insegnamento, si rende manifesta una preponderanza del ruolo sulla persona: l'impressione che abbiamo maturato, anche nei momenti di maggiore affiatamento e discussione con la classe, è comunque quella di vivere in una zona grigia tra lo status di studenti e quello di insegnanti. In altre realtà, ad esempio nel corso delle ore di osservazione effettuate l'anno scorso in un IPSIA, ha da subito e radicalmente prevalso un approccio nei nostri confronti del primo tipo, in questo caso, invece, forse anche alla luce di personalità molto più particolari tra gli studenti, ha prevalso una forma di diplomatica prudenza, di interazione più controllata. Per quanto riguarda gli strumenti impiegati, si fa ripetutamente menzione dei benefici tratti dalle ore spese nel laboratorio di informatica (*Scheda 2 e Scheda 2bis*) ed in quello di fisica (*Scheda 3*). Alcuni studenti annotano che spesso diverse attività intorno ad uno stesso tema hanno contribuito a creare una migliore comprensione d'insieme, ritenendole non di rado reciprocamente chiarificatrici. Uno dei punti sui quali, dovendo ripetere l'esperienza, ci sembrerebbe opportuno intervenire è la sua estensione temporale. Purtroppo, a causa dello spezzettamento dell'orario (PNI/tradizionale) o di altri fattori contingenti al di fuori di qualsiasi controllo preventivo (ad esempio scioperi ecc.) si sono talvolta avuti periodi di temporanea sospensione. Se ciò alla luce dei risultati avvalorava da un lato una certa incisività dell'esperienza, dall'altro è segnalato da alcuni studenti come fonte di difficoltà a tenere sempre viva la tensione cognitiva. Si segnalano infine i casi di un paio di studenti (del curriculum tradizionale) che manifestano un certo disagio di fronte al lavoro organizzato per schede ed alla natura del percorso scelto, a cavallo tra fisica e matematica, all'impiego di strumenti diversi ed all'intervento di più voci (tirocinanti + IDC) intorno ad uno stesso tema. La proposta che ci sembra di cogliere nelle loro parole (forse sulla scorta di un disagio emotivo più che cognitivo, visto che per alcuni i risultati conseguiti non sono negativi) si orienta verso una didattica più tradizionale, fondata più su conoscenze certe da acquisire, che altre vissute come incerte da scoprire. La questione che qui si aprirebbe non ha più solo risvolti didattici, ma si richiama a dimensioni umane particolari, che non possono essere risolte entro gli schemi rigidi di alcuna teoria, ma che anzi pone le istanze di percorsi idealmente personalizzati, soprattutto nell'impiego di linguaggi e strumenti, il che sarebbe cosa non agevole da gestire e realizzare entro classi numerose e sull'intero arco della programmazione, dovendosi introdurre sfasamenti tra le singole componenti della classe e quant'altro eviti la presenza di attriti tra gruppi che, marciando a velocità diverse, forniscano proposte e risposte diverse all'insegnante.

### Bibliografia

- Cassirer E. (1923) *Filosofia delle forme simboliche: il linguaggio*. La nuova Italia  
Fock G. (1980) *Scritti sulla meccanica quantistica* (MIR)  
Heidegger, M. (1971). *Poetry, Language, Thought*.  
Lakoff G., *Metaphors We Live By* (con la collaborazione di Mark Johnson)  
Leibnitz, G. W. *New Essays concerning Human Understanding*.  
Luzi M., (1991) "Colloqui sulla poesia" Edizioni Essegi  
Paola, D. (1997), *La multimedialità - Esperienze - Critiche, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.20A-B, 712-746.  
Radford, L. (2002a). *The Object of Representations: Between Wisdom and Certainty*. In F. Hitt (ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (219-240).

*Radford, L.* (2002b). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

*Radford, L.* (2003a). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

*Tarassov, L.* (1978), *Physique quantique et opérateurs linéaires* (MIR)

*Vari Autori*, (1977) *Scritti di Scienze* (pag. 32-38, Una critica di Langevin alle idee di Pascal) (MIR)

## ALLEGATI

## Questionario

1. Scrivi con parole tue cosa intendi per *funzione periodica*
2. Indica almeno due *fenomeni* che possono essere ragionevolmente descritti da una *funzione periodica*
3. Indica almeno due *fenomeni* che non possono essere descritti da una *funzione periodica*
4. Traccia uno schizzo dell'andamento di una possibile *funzione periodica*
5. Scrivi con parole cosa intendi per *traiettoria* di un corpo in movimento
6. Scrivi con parole cosa intendi per *legge oraria* di un corpo in movimento
7. Una funzione periodica

- a. Può avere come variabile indipendente solo il tempo
- b. Può dipendere da una qualsiasi variabile

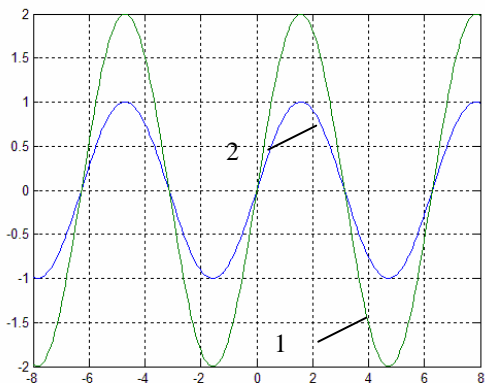
8. Indica quale dei seguenti fenomeni può essere ragionevolmente descritto da una funzione periodica

- a. L'uscita del numero 8 sulla ruota di Roma
- b. La rotazione della lancetta dei secondi in un orologio analogico
- c. Il rientrare a casa da scuola

9. Una funzione periodica

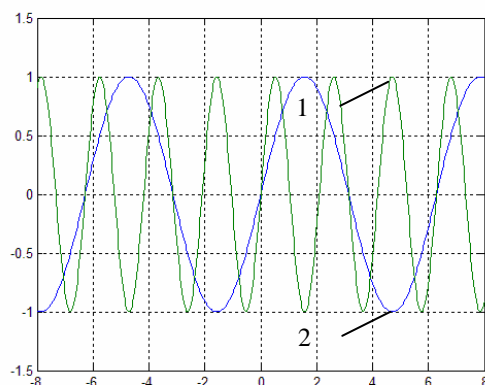
- a. Può crescere indefinitamente
- b. Può decrescere indefinitamente
- c. Non può essere soltanto crescente o decrescente

10. Date le funzioni in figura si può concludere che



- a. Hanno entrambe lo stesso periodo
- b. La funzione 1 ha periodo maggiore
- c. La funzione 2 ha periodo maggiore

11. Date le funzioni in figura si può concludere che:



- a. Hanno entrambe lo stesso periodo
- b. La funzione 1 ha periodo maggiore
- c. La funzione 2 ha periodo maggiore

12. In un comune orario ferroviario è presente:

- a. La legge oraria del treno
- b. La traiettoria seguita dal treno
- c. Entrambe

## ANALISI RISPOSTE QUESTIONARIO

**Domanda 1**

*Risposte:*

1. una legge che ha come variabile il tempo, ma che risulta infinita e quindi con termini indeterminati
2. qualcosa che ha sempre lo stesso ritmo
3. funzione che esprime l'evoluzione nello spazio di un corpo in periodi di tempo diversi
4. una funzione che si ripete all'infinito sul piano e ha come grandezze spazio, tempo e intensità, quindi si può definire una grandezza vettoriale (una grandezza è vettoriale se per misurarla bisogna avere  $s$ ,  $t$ , velocità)
5. una funzione periodica viene rappresentata con delle curve, perciò non è lineare, ma è di grado superiore al secondo. Penso che descriva l'andamento di una funzione suddivisa in periodi di tempo.
6. Una funzione che si ripete ogni tot di tempo, però non capisco perché sul grafico compaiono i numeri negativi
7. Forse esprime in un'unità di tempo quante volte si verifica un fenomeno continuo, con che frequenza esso si manifesta nel tempo, con che intensità e per quanto tempo
8. Una funzione che si prolunga nel tempo
9. Una funzione che descrive un periodo di tempo
10. È la rappresentazione delle oscillazioni di un certo fenomeno entro uno spazio definito
11. Una funzione che può essere rappresentata su un grafico con l'asse  $x$  indicante il tempo. Che si ripete nel tempo e che può avere alti e bassi (cresce e decresce)
12. È una funzione alternata. Prima è decrescente, poi crescente e così via
13. Una linea curva che ha un punto di massimo e un punto di minimo che ha un'oscillazione costante in un determinato tempo
14. Tipo onde elettromagnetiche che oscillano attorno a un centro
15. È la rappresentazione di un fenomeno che si ripete periodicamente
16. Una funzione che ogni dato periodo ripercorre la stessa strada ad esempio una funzione che ogni due secondi si trova nella stessa posizione di due secondi prima e fa un grafico)
17. Periodico può; esserlo un numero, per esempio 2,(3) e ciò significa che questo numero continuerà nel tempo e non sarà mai definito. Forse la funzione periodica è una funzione indefinita che "prosegue" nel tempo.
18. Una crescita o decrescita persistente nel tempo, quindi non finita ma continuata (nel tempo). Per dire questo ho esaminato la parola periodo nell'uso quotidiano del termine. Di solito l'uso di periodo è utilizzato in modo vago e non determinato, almeno che non venga specificato un limite.

Non rispondono: 2

*Commenti alle risposte alla domanda 1:* gli studenti sembrano, in genere, cercare risposte in "matematiche" o "fisiche", ossia in un linguaggio non capito, non noto, ad emulazione di quello dell'insegnante. Emerge uno schema autoritario o rituale della definizione. Gli studenti utilizzano localmente metafore legate ad aspetti percettivi ("prosegue", "prolunga", "oscilla, ...). Inoltre sembrano identificare "periodico" con qualcosa di infinito e quindi di indefinito, di vago, inafferrabile, indeterminato. In sostanza, che cosa ricordano della definizione di numero periodico? Il numero infinito di cifre e l'illimitatezza, associata all'impossibilità di afferrare il numero. Non associano al concetto il fatto che l'informazione del periodo contiene tutta l'informazione rilevante.

Mi sembra questo un dato che emerge fortemente e che va tenuto sotto controllo in fase di discussione di gruppo e chiarito in fase di discussione collettiva.

**Domanda 2**

*Risposte:*

1. L'orbita della Terra intorno al Sole (perché è un evento non mutabile nel tempo). Una goccia d'acqua che cade con ritmo costante da un rubinetto. L'espandersi di un gas (perché è un fenomeno casuale e non controllato dal tempo)
  2. grafico spazio tempo con spazio e tempo in diretta relazione fra loro (e produce il grafico di una retta)
  3. Non so se la funzione periodica esprima l'andamento di un evento ciclicamente identico nel trascorrere del tempo (pendolo) o l'andamento di un evento che seppur ripetendosi periodicamente presenti differenze tra un moto e l'altro (ritorno a casa da scuola) Propendo per la seconda.
  4. Spostamento che fa sulle rotaie il treno che va da Finale, arriva a Loano e viceversa. Percorso che faccio per andare a scuola e tornare a casa da scuola (solo se ripercorro esattamente la stessa traiettoria)
  5. Le onde sonore
  6. Uragani e venti o le maree
  7. Emissione di radiazioni in diversi giorni della settimana. La presenza di CO<sub>2</sub> nell'aria in diversi giorni.
  8. evoluzione di sistemi prede – predatori (e fa un grafico sensato)
  9. prede – predatori (senza grafico) e l'andamento della fioritura di alcune piante nelle varie stagioni
  10. il respiro; i giri del motore
  11. una funzione periodica può descrivere per esempio il suono di una chitarra o generalmente un suono, onde radio, elettromagnetiche
  12. onde elettromagnetiche, la rappresentazione dell'oscillazione di un pendolo
  13. movimento di un pendolo
  14. moto di un pendolo e quello delle maree, la migrazione degli uccelli
  15. fenomeni che perdurano nel tempo (ad esempio la probabilità che avvenga qualcosa, l'uscita di un numero ... la possibilità che vi sia bel tempo oppure no)
  16. le onde di un suono che vengono rilevate da un radar ogni tot
- Non rispondono: 4

*Commenti alle risposte alla domanda 2:* alcuni studenti dimostrano di non possedere le competenze linguistiche adeguate a dire ciò che vogliono. Il nostro intervento dovrebbe essere quindi anche finalizzato a offrire loro termini adeguati ... come? Quali strade?

Negli esempi, però, a parte il fatto che alcuni parlano di rappresentazioni dei fenomeni e non dei fenomeni, emerge una miglior comprensione della nozione di fenomeno periodico (almeno per gli studenti che hanno fatto fisica), rispetto a quella dimostrata per il concetto di moto periodico.

### **Domanda 3**

*Risposte:*

1. Il galleggiamento; la traiettoria di un corpo in movimento
2. gli alunni che escono da scuola alla fine della mattinata: possono essere paragonati a un gas, perché ognuno segue il suo percorso
3. Il sorgere del Sole; l'avanzamento del tempo
4. Il movimento di un giocatore di calcio durante una partita (e fa uno schizzo di un campo da calcio solcato da una traiettoria "caotica")
5. Le tariffe di una compagnia telefonica
6. Non ne ho idea!
7. Il variare del numero di scarpe di un ragazzo da 7 a 8 anni e la sua crescita in altezza
8. La traiettoria di un corpo e la direzione in cui un corpo si muove (e fa uno schizzo con due grafici, uno lineare e uno parabolico)
9. Il moto rettilineo uniforme e non saprei altro
10. L'accelerazione, grafico delle vendite
11. una funzione periodica non può descrivere un triangolo o la maturazione di un frutto

12. Una retta, moto rettilineo uniforme
  13. la rappresentazione spazio – tempo di un'automobile
  14. Tutto ciò che non è ripetitivo e costante nel tempo
  15. due fenomeni definiti e probabili, anzi certi nel tempo (ad esempio il rientro a casa da scuola e il fatto che pranziamo almeno una volta al giorno è qualcosa di definito e sicuro)
  16. non si possono prendere da esempio fenomeni che non hanno sviluppo nel tempo
- Non rispondono: 4

*Commenti alle risposte alla domanda 3:* si confermano i gravi problemi linguistici e in alcuni casi si conferma l'ipotesi che alcuni studenti possiedono un'accezione del termine "periodico" in contrasto con quella che abbiamo scelto come riferimento. Inoltre ben pochi si riferiscono realmente a fenomeni: molti si riferiscono a rappresentazioni di oggetti o ad oggetti. Dobbiamo lavorare molto sul piano linguistico: aiutare questi ragazzi a forgiarsi strumenti per la comprensione (per esprimere ciò che vogliono dire, per comprendere e farsi comprendere).

#### **Domanda 4**

*Risposte:*

- Schizzo di una funzione oscillante con periodo individuabile: 16  
 Schizzo di una funzione oscillante con periodo non individuabile: 2  
 Schizzo di una funzione lineare e un dente di sega: 1  
 Non rispondono: 1

*Commenti alle risposte alla domanda 4:* molto interessante. I ragazzi sanno usare il linguaggio dei grafici e non riescono a descrivere con le parole della lingua italiana quello che esprimono con i grafici? L'ipotesi è affascinante e inquietante allo stesso tempo. Da seguire con particolare attenzione la prossima attività, nella quale farei lavorare i ragazzi a gruppi di 4 chiedendo loro di confrontare le definizioni date a di arrivare alla fine a un accordo sulle risposte dopo la discussione.

#### **Domanda 5**

*Risposte:*

1. La direzione nella quale il corpo sta procedendo: 2
2. è il movimento che esso compie nello spazio
3. è il percorso che il corpo compie: 2
4. è la linea passante per tutte le coordinate su un piano bidimensionale ( $x, y$ ) o tridimensionale ( $x, y, z$ )
5. è il movimento che fa il corpo per raggiungere da un punto A a un punto B. La traiettoria è l'insieme dei punti che il corpo tocca ( e fa un esempio di traiettoria disegnando una linea)
6. è una linea formata dai punti che il corpo ha percorso in movimento
7. è l'andamento nelle tre dimensioni di un corpo in movimento
8. la direzione e il verso in cui si muove un corpo
9. è il percorso che il corpo compie: la sequenza dei punti su cui il corpo passa
10. è il movimento di un corpo ed è rappresentato da punti allineati
11. è l'andamento di un corpo in movimento
12. è il verso in cui un corpo si muove
13. è lo spazio percorso tenendo conto anche del verso o della direzione
14. è la sua direzione nel verso del movimento
15. è la linea o percorso che ha percorso (aggiunge: dubbio?)
16. è la retta che unisce tutte le posizioni assunte dal corpo nel corso del tempo

17. man mano che un corpo o un punto materiale si muove nello spazio, traccia una linea dalle più svariate forme, questa è la traiettoria del corpo in movimento  
 18. traccia un piano cartesiano con una retta orientata passante per l'origine e scrive sopra "traiettoria"

*Commenti alle risposte alla domanda 5:* tutti hanno dato una risposta. Si confermano le difficoltà linguistiche. Ci sono altri problemi, in particolare il fatto che molti identificano la traiettoria con una retta e alcuni dimostrano di non avere una chiara idea del concetto di direzione.

## Domanda 6

*Risposte:*

1. la funzione matematica con la quale calcolo e spiego il movimento del corpo in funzione del tempo, dello spazio, della velocità, ecc..
2. è qualcosa di regolare che si ripete sempre (esempi: il ciclo vitale, la vita quotidiana.... Indica le azioni ripetitive che fa)
3. dato un determinato istante dove si trova il corpo
4. determina le variabili dello spazio in funzione del tempo
5. è la legge mediante la quale si può trovare avendo due grandezze su tre (s, t, velocità) ad esempio la legge oraria del moto rettilineo uniforme è  $v = (s_2 - s_1) / (t_2 - t_1)$  ossia  $v = s/t$  da cui  $s = vt$  e  $t = s/v$
6. indica lo spazio percorso dal corpo in funzione del tempo
7. stabilisce con variabili il movimento di un corpo
8. permette di descrivere il moto di un corpo
9. è un'ipotetica tabella sulla quale possiamo riportare i vari tempi in relazione ai vari posti che corrispondono al tempo
10. il rapporto tra il tempo che si impiega a compiere una traiettoria e lo spazio percorso
11. è una rappresentazione che mi informa che un corpo all'istante  $x$  si trova in un certo luogo e coinvolge quindi spazio e tempo
12. la legge con la quale si trova lo spazio percorso dati il tempo e la velocità ed eventualmente l'accelerazione
13. il rapporto tra lo spazio e il tempo
14. può essere  $v = s/t$  oppure  $s = vt + 1/2at^2$ , cioè il rapporto tra la velocità lo spazio percorso e il tempo impiegato per percorrere lo spazio che sono le caratteristiche per definire che un corpo sia in movimento
15. la legge oraria? Dubbio
16. è una funzione che cambia in base al tempo
17. è la velocità (e aggiunge tra parentesi un "?" e vari puntini ...)
18. è quella relazione fisico - matematica che risolve il problema della cinematica, dunque la legge oraria permette di calcolare lo spazio in funzione del tempo del moto di un corpo  $s = s(t)$
19. legge che descrive l'andamento di un corpo

Non rispondono: 1

*Commenti alle risposte alla domanda 6:* molti studenti non dimostrano di possedere il concetto di legge oraria come funzione (con variabile indipendente il tempo). Hanno invece un'idea algebrica statica, legata alle equazioni e alle variabili come incognite aventi tutte lo stesso statuto. Questa visione può essere indotta dai problemi di cinematica. Si tratta di osservare bene su questo punto la discussione. L'ipotesi (o forse piuttosto la speranza) è che fra gli studenti che hanno fatto negli anni passati esperienza con i sensori di movimento l'idea di legge oraria come funzione del tempo sia prevalente, ma si tratta di verificarla, perché il questionario non conferma né smentisce.

## Domanda 7

*Risposte:*

1. Può avere come variabile indipendente solo il tempo 11
  2. Può dipendere da una qualsiasi variabile 7
- Non rispondono 2

### **Domanda 8**

*Risposte:*

- L'uscita del numero 8 sulla ruota di Roma 2  
La rotazione della lancetta dei secondi in un orologio analogico 8  
Il rientro a casa da scuola 9  
Non rispondono 1

### **Domanda 9**

*Risposte:*

- Può crescere indefinitamente 4  
Può decrescere indefinitamente 3  
Non può essere soltanto crescente o decrescente 10  
Non rispondono 6

Uno che non risponde chiede: che cosa vuol dire che una funzione periodica cresce?  
Un altro dice "Dubbio"

### **Domanda 10**

*Risposte:*

corrette: 10  
errate: 6  
bianche: 3

### **Domanda 10**

*Risposte:*

corrette: 8  
errate: 6  
bianche: 5

Potrebbe sembrare strano, ma da alcune precisazioni si carica che gli studenti confondono il periodo con l'ampiezza della funzione. Molti infatti precisano: se il periodo è su  $x$  allora la scelta giusta è a).

### **Domanda 12**

*Risposte:*

La legge oraria del treno 4  
La traiettoria seguita dal treno 5  
Entrambe 10

Non rispondono 1

*Commento alle risposte alla 12:* gli studenti sembrano ritenere che l'esplicitazione delle fermate ferroviarie (i paesi) consenta di determinare la traiettoria. A mio avviso stanno implicitamente pensando a un binario rettilineo nel quale vengono precisate le fermate. Altri hanno pensato, probabilmente alle pagine iniziali degli orari nelle quali è presente la rete ferroviaria con le stazioni che mantengono un ordinamento (ma che non rappresentano una traiettoria ...) Ciò che preoccupa, più che quei 10 che hanno detto che sono entrambe presenti (con questa brutta interpretazione di traiettoria), sono i 5 che hanno detto che nell'orario è presente solo la traiettoria, confermando una mancanza di comprensione di che cosa sia una legge oraria.

## Attività post-questionario

### Consegna

Riunitevi in gruppo e discutete delle risposte date al questionario iniziale, cercando di concordare una risposta di gruppo, tenendo anche in considerazione il commento alle risposte effettuato nella prima lezione.

### Commento alle risposte

Le risposte sono ora confortanti. Solo un gruppo sbaglia le risposte alle domande 10 e 11. C'è ancora qualche difficoltà a precisare i concetti di traiettoria e legge oraria, ma sembra che, a parte le difficoltà linguistiche, questi concetti siano abbastanza chiari (forse qualche problema in più sembra darlo il concetto di legge oraria).

Un commento sulle richieste di spiegazione durante il lavoro di gruppo: alcune richieste hanno rivelato poca attenzione durante il commento alle risposte al questionario. D'altra parte alcune risposte fornite dagli studenti facevano diretto ed esplicito riferimento a cose dette durante il commento. Questo può essere un buon segno: il commento è servito, ha chiarito; oppure pessimo: i ragazzi sono sempre ancorati a una visione autoritaria della disciplina e ripetono quello che dice l'insegnante (la ripetizione qui ha un effetto positivo, perché è effettuata dopo poco tempo, ma quando il tempo passa...)

Scheda di lavoro n. 1

Da svolgere a coppie

1. Considerate una massa ferma, appesa ad una molla in posizione verticale. Descrivete con parole vostre, quali forze agiscono sulla massa. Può esservi d'aiuto utilizzare un disegno nel quale indicarle.
  2. Considerate ora il caso in cui la massa del caso precedente sia messa in oscillazione lungo la verticale. Descrivete con cura, in modo da rendere intuibile il fenomeno a chi ancora non lo conosca, il moto di oscillazione della massa.
- 

3. Soffermatevi ora sulle seguenti grandezze: posizione, velocità, accelerazione e, inizialmente, descrivetene a parole (magari aiutandovi con dei gesti) il comportamento nei vari istanti del moto. Cercate poi una descrizione più precisa aiutandovi con dei grafici.
  4. Che cosa si può dire in merito alle forze? Indicate le eventuali differenze rispetto al caso del punto 1. In particolare riflettete sul ruolo che ha la gravità nel moto in questione. *Suggerimento*: ripercorrete mentalmente la procedura che avete fatto per costruire il sistema: come si è comportata la molla dopo che avete appeso la massa? Come oscilla la massa rispetto alla posizione di partenza indicata dalla tacca?
- 

5. Soffermatevi sulle considerazioni fatte ai punti precedenti: provate a descrivere la forza esercitata dalla molla con particolare attenzione al legame tra il suo valore e l'allungamento della stessa.

Attività da svolgere a casa:

Considerate una delle situazioni che avete già considerato in precedenza e tracciate un grafico che dia un'idea di come la forza elastica dipende dall'allungamento della molla e un altro grafico che indichi come dipende dal tempo. Giustificate le risposte.

La classe viene fatta lavorare per un'ora sui primi due punti della scheda 1:

Da svolgere a coppie

6. Considerate una massa ferma, appesa ad una molla in posizione verticale. Descrivete con parole vostre, quali forze agiscono sulla massa. Può esservi d'aiuto utilizzare un disegno nel quale indiarle.
7. Considerate ora il caso in cui la massa del caso precedente sia messa in oscillazione lungo la verticale. Descrivete con cura, in modo da rendere intuibile il fenomeno a chi ancora non lo conosca, il moto di oscillazione della massa.

In classe è posto uno stativo metallico con una molla e dei pesi. Altre molle e pesi sono resi disponibili per gli studenti che possono congetturare liberamente ed utilizzare a loro piacimento gli strumenti. Viene brevemente introdotto il lavoro da svolgere inquadrandolo nel suo naturale contesto di preliminare osservazione del fenomeno (oscillazione libera di una massa sottoposta a forza elastica) che verrà passo passo sviluppato in una sua forma più rigorosa sino al suo conclusivo inquadramento matematico nell'ambito delle funzioni periodiche.

Analisi degli elaborati

### **Domanda 1:**

1: l'allungamento della molla è dovuto alla forza peso. La molla esercita una forza di pari intensità e verso contrario sul corpo. L'allungamento della molla è direttamente proporzionale alla massa del corpo  
A parte la congettura non suffragata di "proporzionalità diretta" sono ottime osservazioni. Molto accurato il diagramma di corpo libero.

2: La molla è attirata verso terra dalla gravità con una forza= $mg$  quindi aumentando la massa della molla (aggiungendo pesi) essa è sottoposta a forza maggiore la molla si allunga perché dotata di forza elastica. Corpi rigidi come una sbarra di ferro non si allungherebbero. Aumentando la massa della molla si allunga, diminuendola si accorcia

L'idea c'è (ho parlato direttamente col ragazzo) ed è corretta... magari espressa in modo non rigorosissimo. Interessante che abbia sentito il bisogno di specificare casi diversi rispetto alla molla. Parlandogli ho capito che soprattutto era interessato a capire "l'origine" di tale forza... ed è questa una sua esigenza-prerogativa visto che specifica che la molla è attirata verso Terra... Non si aiuta con disegni

3: il corpo esercita una forza verso il basso pari ad  $mg$ . Si avrà equilibrio quando l'estensione della molla darà origine ad una forza par e contraria a quella del corpo

Essenziale e corretto anche nel diagramma di corpo libero

4: c'è solo scritto forza di gravità + forza peso = forza molla

Confusione tra gravità e peso. Errore ricorrente anche in altri elaborati.

5: la forza di gravità spinge la massa  $M$  verso il basso ma la molla si oppone a questa forza fermando il corpo con una forza uguale opposta. In assenza di peso la molla tornerebbe nella posizione originale

Sostanzialmente corretto. Non viene specificato il legame tra massa e forza di gravità

6: le forze che agiscono nel sistema sono 4:

forza di gravità verso il basso

il peso della massa verso il basso e che attaccato alla massa fa sì che si allunghi

l'attrito dell'aria che agisce verso l'alto appena il peso viene attaccato alla molla. Essendo la molla dotata di elasticità il peso tende a cadere (se la molla non fosse dotata di elasticità il peso agirebbe lo stesso verso il basso ma senza cadere) e durante la caduta l'attrito dell'aria si oppone al moto contribuendo insieme al sostegno a far sì che la molla si stabilizzi

il sostegno al quale viene agganciata la molla

all'aumentare della massa aumenta l'estensione della molla e di conseguenza il periodo di oscillazione

confusione tra forza peso e massa. Nella discussione vengono chiamate un po' caoticamente assieme tutte le componenti del sistema (il sistema) che viene assimilato ad una forza... C'è la tentazione a vedere comunque sempre la cosa nel suo divenire dinamico e c'è una percezione dell'attrito dell'aria un po' confusa nell'esposizione ma forse, sostanzialmente, corretta

7: le forze che agiscono sono: la massa dell'oggetto, la massa della molla e la gravità

Consideriamo la molla 1 con 6 pesi, la 2 con 3 pesi, poi con 8 e con 4. La differenza tra le due molle è proporzionale alla differenza delle masse del corpo 2 meno la massa del corpo 1. Solite difficoltà linguistiche ed ancora errore tra massa e gravità. Secondo me molla 1 e molla 2 non sono altro che la stessa molla a riposo e allungata.

8: forze che agiscono sull'oggetto: la massa dell'oggetto + la massa (trascurabile) della molla + la forza di gravità [...]

Non si specifica chi è l'oggetto... Secondo me volevano solo elencare le forze che sono presenti nel sistema... Dubito che intendessero che la molla, stando sopra al peso, lo schiacciasse e quindi esercitasse su esso una forza. L'elaborato è poi identico al #7 segno di collaborazione ulteriore tra gruppi.

### **Osservazioni conclusive domanda 1**

In nessun elaborato compare un asse di riferimento. I diagrammi di corpo libero sono corretti... ma manca un sistema di riferimento.

La confusione tra gravità e massa non mi pare poi così strana: secondo me chi commette questo errore assimila la gravità alla molla... ossia ad una forza esterna al sistema che sta osservando e poi.. si accorge che gli avanza ancora una grandezza: la massa, il peso del corpo... per cui ci infila anche quello pensando che sia una caratteristica intrinseca al corpo, mentre la gravità gli viene in dote dall'esterno.

### **Domanda 2:**

1: mettendo in moto il sistema si interviene sull'equilibrio delle due forze. Nel momento in cui si imprime al corpo una forza la molla si allunga maggiormente esercitando quindi una forza maggiore sul corpo. Se il corpo viene lasciato le due forze non si equivalgono determinando quindi uno spostamento del corpo verso l'alto con velocità  $V$ . tale velocità fa sì che il corpo superi la posizione di equilibrio che aveva in stato di quiete fino ad azzerarsi a causa della forza di gravità. In questo momento il peso del corpo ha forza maggiore rispetto a quella della molla e ne causa la caduta con velocità  $v_1$  la quale viene azzerata dalla forza elastica della molla. Questo è un moto periodico e contribuirebbe all'infinito nel caso mancassero attriti che rallentano il sistema Perfetto... se volessi cavillare direi che si potrebbe essere più precisi sul ruolo della velocità... ma non ho nulla da dire. Qui hanno capito davvero molto. Di alto profilo la distinzione che verso l'alto a rallentare è la gravità, verso il basso è la molla che si allunga. Splendido.

2: se io aggiungo forza al sistema (tiro giù il peso) la molla comincia ad oscillare e in assenza di attrito continuerebbe ad oscillare

Se io tiro giù la molla e la tengo giù è come se aggiungessi massa e la molla si allunga e il sistema è in equilibrio, nel momento in cui lo lascio non c'è più la forza che faceva allungare la molla fin dove l'avevo tirata giù, allora torna su, tende a tornare alla lunghezza che deve avere con il peso che ho attaccato. La molla oscilla ancora su e giù perché c'è comunque una forza che io ho aggiunto al sistema che viene pian piano esaurita dall'attrito. C'è la preoccupazione di motivare l'origine della forza, come nel punto 1. Il suo punto di vista è interessante però. Mentalmente... lui pensa all'energia e la chiama forza. Se al posto di forza ci metti energia... tutto torna: c'è un contenuto di energia in più rispetto all'equilibrio iniziale... il sistema, muovendosi nell'intorno di un minimo... tende a tornare al punto di partenza ma solo l'attrito consuma l'eccesso di energia. Se ne può discutere

3: intervenendo sulla situazione di equilibrio imprimendo al corpo una forza esterna verso il basso si creerà tale situazione (seguono due disegni, uno con molla allungata rispetto all'equilibrio ed uno con molla compressa e l'indicazione di due forze, una con pedice  $m$  (molla) ed uno con  $c$  (corpo)). Accanto al disegno in cui la molla risulta allungata sta scritto che  $F_m > F_c$  per cui si avrà luogo a un movimento del corpo verso l'alto, esprimibile con un'energia cinetica  $V$  che eleverà il corpo sino ad azzerarsi per la decelerazione gravitazionale. Il corpo avrà superato la situazione di equilibrio e si troverà in questa posizione (disegno con molla compressa). Essendo quindi  $F_c$  maggiore si avrà luogo ad uno spostamento verso il basso. In assenza di attriti con l'aria e a dispersioni dovute all'imperfezione elastica questo moto proseguirà all'infinito. Nella realtà invece per gli attriti tenderà a stabilizzarsi.

Per la prima volta compare esplicitamente un riferimento all'energia cinetica, qui però identificata con la velocità. Buona la distinzione tra i due casi, anche se nell'applicazione (implicita) del teorema di conservazione dell'energia, non c'è alcun riferimento al potenziale della molla. Inoltre, il rallentamento del corpo è spiegato come dovuto alla presenza della gravità (nella fase ascensionale) ignorando che in ogni istante ciò che agisce sulla massa è una risultante di forze (elastica e gravitazionale). E' questa una formulazione più sporca della 1... ed una sorta di forma ibrida tra 1 e 2.

4: la molla all'inizio non ha forza. Il peso glielo da quando scende per la forza di gravità. Oscillerà fino a che la forza della molla non sarà uguale alla forza di gravità + forza peso

Ci sono i problemi già evidenziati nel caso statico. L'elaborato è povero, involuto e, sostanzialmente, cerca subito di ricondursi frettolosamente alla condizione di equilibrio che ha esplicitato in relazione alla domanda 1.

5: di nuovo due disegni: uno per molla allungata ed uno per molla compressa.

Nel caso 1 (allungamento) la forza che la molla oppone alla forza di gravità è maggiore a questa, quindi sale.

(segue una frase mezza cancellata che voleva essere preparatoria alla precedente e che, sostanzialmente descrive l'atto di allungamento e rilascio della molla). Poi sta scritto:

quando  $F_1$  (forza indicata verso il basso accanto alla massa ma non precisata nella sua natura) è maggiore di quella elastica, la molla è tirata; ; fino a quando la molla esercita una forza superiore al peso, il peso sale sino a quando non esercita una forza superiore alla molla. Il sistema non si stabilizza sul punto di equilibrio perché quando il peso raggiunge questo punto, tende a continuare il suo moto per il principio di inerzia.

C'è una mistura tossica di buone intenzioni. Viene confusa la fase preparatoria (tiro giù la molla e la lascio) con quella del moto vero e proprio... Si ignora che, salendo oltre il punto di equilibrio, la massa continua ancora per un certo tratto la sua corsa anche se la forza della molla è minore di quella peso. Errata applicazione del principio di inerzia. Complessivamente... hanno individuato alcuni caratteri essenziali del moto del sistema (distinguere tra sopra e sotto l'equilibrio) ma ne hanno dato una formulazione carente e molto convulsa.

6: in assenza di attrito l'oscillazione della molla è costante. Tenendo la molla in tensione il sistema è in equilibrio, cioè fermo. Appena viene lasciato la molla comincia ad oscillare e col passare del tempo la sua forza elastica diminuisce fino ad arrivare allo stato iniziale. Più la massa è maggiore più lungo sarà il periodo di oscillazione. La forza di oscillazione diminuisce in proporzione con l'attrito fino allo stato iniziale

Si tenta qualche congettura sull'attrito pure se risulta fumosa l'espressione di "forza di oscillazione"... : forse intendevano dire che l'ampiezza delle oscillazioni, o, più semplicemente, che maggiore è l'attrito meno la molla oscilla. Viene descritto il fenomeno di oscillazione ma nessuna congettura è fatta sulle forze che determinano tale moto.

7: il corpo se viene lasciato andare oscilla, ma poi si fermerà per l'attrito dell'aria. Se non ci fosse attrito esso continuerebbe ad oscillare

Qui sbagliano ad interpretare la consegna ed intendono oscillazioni intorno al punto cui è fissata la molla, ossia tipo "pendolo"

8: tirando la molla il corpo riceve una forza uguale e contraria che fa molleggiare l'oggetto. L'ampiezza diminuisce poiché attraverso gli attriti dell'aria la molla perde la sua energia iniziale

Nessun riferimento al meccanismo di oscillazione ed utilizzo qualitativo della dissipazione di energia dovuta ad attriti.

### **Osservazioni conclusive e proposte**

Complessivamente, in pochi si sono occupati di descrivere "in italiano" il fenomeno. Anche gli elaborati migliori fanno riferimento a conoscenze pregresse, più o meno formalizzate ed interiorizzate. In un certo senso è un bene, ma anche indica che sono abituati poco ad osservare un fenomeno nudo e crudo per come è, ma che subito cercano di riferirlo a quello che sanno. E' un po' come averli messi di fronte ad un quadro figurativo: avrebbero subito pronunciato la parola, albero (vedendo un albero) e non avrebbero fatto come i primitivi... cercando più semplici locuzioni per descriverlo. E' un aspetto su cui riflettere perché in molti l'errore nello svolgimento della consegna è stato proprio maturato dall'utilizzo (formalmente errato) di conoscenze precedente. Farei notare la cosa alla classe, per sollecitare, se possibile, una riflessione critica da parte loro.

Direi poi di procedere così: mettiamo a posto quella confusione tra massa e gravità, poi, in forma assolutamente anonima, leggiamo le risposte date negli elaborati 1 e 2 e le commentiamo come due possibili punti di vista risolutivi della questione. È un modo, mi pare, di tirare le fila utilizzando un punto di vista "interno" alla classe.

**Domande consegnate agli studenti:**

8. Soffermatevi ora sulle seguenti grandezze: posizione, velocità, accelerazione e, inizialmente, descrivetene a parole (magari aiutandovi con dei gesti) il comportamento nei vari istanti del moto. Cercate poi una descrizione più precisa aiutandovi con dei grafici.
9. Che cosa si può dire in merito alle forze? Indicate le eventuali differenze rispetto al caso del punto 1. In particolare riflettete sul ruolo che ha la gravità nel moto in questione. (*Suggerimento*: ripercorrete mentalmente la procedura che avete fatto per costruire il sistema: come si è comportata la molla dopo che avete appeso la massa? Come oscilla la massa rispetto alla posizione di partenza indicata dalla tacca?)

La consegna è di lavorare a coppie o gruppi di 3, misti, secondo le modalità già esplicitate nel caso della prima parte della Scheda 1. In aula è montato il consueto stativo con molla, pesi graduati ed ogni gruppo può utilizzare liberamente lo strumento per agevolare le proprie considerazioni.

Giriamo liberamente tra i banchi prendendo parte, ove richiesto dagli studenti, alle discussioni del gruppo. L'approccio è dichiaratamente costruttivista... e non risolutivo delle questioni sollevate. La riflessione degli studenti è guidata liberamente senza che mai venga fornita una risposta pre-confezionata, ma piuttosto sia promosso lo spirito critico dei singoli e dei gruppi intorno alle questioni sollevate. Questa fase è più quantitativa delle precedenti e richiede la produzione di grafici, il loro confronto e, finalmente, una fase di raccolta sperimentale di dati (allungamento al variare del peso) in grado di produrre congetture sulla legge di allungamento della molla.

A questa fase seguirà un commento in presenza di tutta la classe di tutti gli elaborati e delle ipotesi più suggestive emerse, una sistemazione più formale delle problematiche emerse, con particolare attenzione per quei risvolti che non si sono risolti attraverso la discussione guidata all'interno dei gruppi di lavoro. Sarà questa la fase preparatoria ad una matematizzazione del problema proposto attraverso la risoluzione, per mezzo di foglio di lavoro Excel, dell'equazione del moto, attraverso un algoritmo matematico standard, introdotto facendo leva sull'intuizione fisica del fenomeno sin qui analizzato e sulle conoscenze pregresse che la classe ha sviluppato nel corso parallelo di fisic.

**DOMADA 1:**

**1:** sono riportati i tre grafici richiesti. Si fa esplicitamente riferimento al caso reale (presenza di attrito. I tre andamenti sono corretti, anche se la corrispondenza tra i valori di spazio, velocità ed accelerazione non è troppo chiaramente indicata. Avendo lavorato con questo gruppo ritengo sia solo una questione formale, visto che la discussione portata avanti ha invece chiarito il legame tra le tre grandezze e, in particolare, si è discusso della differenza tra la rappresentazione del modulo (attuata nel caso della velocità) e quella del vettore (attuata nel caso di accelerazione e posizione).

**2:** viene individuato correttamente l'andamento sinusoidale della posizione nel tempo, rappresentato attraverso una senoide (smorzata e non smorzata a seconda della presenza di attrito o meno) oscillante intorno ad un offset dichiarato come la posizione di equilibrio. Resta in sospeso il discorso sull'accelerazione mentre la velocità è discussa in un grafico nel quale viene riportato anche l'andamento spaziale. Corretta l'associazione tra nodi e picchi della funzione velocità e quella della funzione spaziale. Resta incompleta la discussione sull'accelerazione

**3:** Il gruppo ha partecipato alla discussione comune con il gruppo 1. Come nei casi precedenti è correttamente individuato l'andamento oscillatorio di spazio, velocità ed accelerazione. La corrispondenza tra spazio-velocità è corretta... ma "forzata", nel senso che non è coerente con la scelta iniziale di tempo zero in corrispondenza della posizione di equilibrio del corpo.

L'associazione (attraverso l'uso di lettere indicate su entrambi i grafici in corrispondenza di nodi e picchi) tra loro velocità e spazio corrispondenti ad istanti identici è però corretta.

Corretta l'associazione spazio-accelerazione e velocità-accelerazione, discussa in grafici a parte ove sono riportati i due andamenti sinusoidali

**4:** si riportano in maniera un po' caotica senza precisazioni ulteriori andamenti oscillatori per posizione e velocità... senza che siano imparentati in alcun modo tra loro. Si precisa che, nel caso con attrito, l'oscillazione si smorza (sempre con un disegno).

**5:** corretta l'associazione spazio-velocità in un unico grafico nel quale si fanno correttamente corrispondere nodi e ventri delle due sinusoidi. Viene esplicitato in maniera non rigorosissima il punto scelto come riferimento (punto dal quale partire a cronometrare)... ma si capisce che la cosa è implicitamente chiara a tutti i componenti del gruppo vista la coerenza dello svolgimento.

Più caotica la formulazione relativa all'analisi dell'accelerazione anche se emerge che hanno individuato (nel caso privo di attriti) una similitudine nella curva che descrive l'accelerazione (anch'essa rappresentata con andamento oscillatorio). Precisamente si dichiara che l'accelerazione e la decelerazione nei due tratti di curva (ascendente e discendente) coincidono. Si dichiara che non vi è relazione, invece, tra due tratti comunque scelti nella fase di discesa/salita della curva  $a(t)$ . Secondo me è un modo confuso per dire che l'accelerazione è uguale per punti corrispondenti (nel tratto di salita o in quello di discesa) ma che tra due punti a caso nel tratto di discesa, ad esempio, essa non è costante.

**7:** poco accurata la parte grafica che riporta solo l'andamento della posizione nel tempo, andamento oscillatorio non molto argomentato e non sottoposto a confronto con velocità ed accelerazione. Viene esplicitato che il moto avviene lungo una retta. Viene descritto il processo di allungamento della molla e della velocità si dice solo che si azzererà per gli attriti. La velocità viene poi associata alla "misura dell'allungamento della molla".

L'accelerazione viene attribuita alla variazione dell'allungamento e quindi della velocità. Si dice che l'accelerazione è inizialmente crescente e con il passare del tempo, "con l'esaurirsi della forza e gli attriti" si azzerà. Mi pare ci sia un po' di confusione in questo

**8:** è l'unico gruppo a non produrre grafici con gli andamenti temporali. Sulla posizione si dice essenzialmente la stessa cosa del gruppo 7 con la precisazione ulteriore che l'elongazione iniziale della molla "è il limite massimo della posizione in cui potrà trovarsi la molla in ogni istante di tempo". Mi pare che in questo caso sia privilegiata la narrazione di alcuni punti significativi nel moto della molla, trascurando il tentativo di interpolare tra essi, capire effettivamente come possa essere descritto da una funzione l'andare "su e giù" del pesetto.

Della velocità si dice che sarà negativa quando la molla si allontana dall'equilibrio e positiva quando si avvicina. Mi pare che qui sia espressa male l'idea che allontanandosi dall'equilibrio vi sia decelerazione (il corpo decelererà) avvicinandosi accelererà. Questa frase andrà riportata nella discussione comune in classe per esplicitare come la chiarezza del linguaggio sia essenziale e per sottolineare come, spesso, intuizioni corrette, sono male amalgamate nel linguaggio usato.

L'accelerazione viene descritta con un disegno in cui si esplicita che, allontanandosi dall'equilibrio si ha decelerazione ed avvicinandosi accelerazione, ossia l'idea espressa nel caso della velocità...

## **DOMADA 2:**

Non viene svolta da tutti i gruppi per mancanza di tempo. Molta della discussione ha infatti riguardato i livelli di parentela tra accelerazione, velocità e spazio, che costituisce poi il nucleo centrale della questione. Chi non ha completato questi punti, potrà integrare con il lavoro a casa o usufruire della fase di discussione comune, nella quale verranno ripresi punto per punto tutti gli aspetti sollevati negli elaborati sin qui prodotti.

**4:** viene data una definizione delle forze in gioco (gravitazionale ed elastica). Non si esplicita l'andamento temporale della forza risultante. Si afferma che più si aggiunge massa più ci impiega il sistema ad arrestarsi in presenza di attriti. Congettura sostanzialmente corretta (c'è più energia da consumare). Si fa riferimento ad un "punto 1" e "punto 2" non precisati

**5:** si afferma che la forza peso è uguale perché la gravità non cambia mentre quella della molla varia proporzionalmente all'allungamento. E' quindi presente l'attitudine a ragionare considerando le forze separatamente e non pensando alla risultante. Molto buona la misura della costante della molla: hanno caricato progressivamente la molla con pesetti diversi, hanno valutato l'allungamento (con un righello) ed applicando le differenze hanno scoperto l'andamento lineare. Questi dati verranno presi per la discussione collettiva della legge elastica della molla

**7:** Non sono prodotti grafici con andamenti temporali. Sono individuate le forze in gioco (peso ed elastica) e si congettura che quando la molla scende domina la forza peso. Scendendo il corpo, la forza elastica cresce sino a diventare nuovamente dominante e tirando su il corpo. L'idea non è malvagia... ma va fatto notare che, nel momento in cui il corpo passa l'equilibrio (scendendo) la forza elastica è già maggiore. L'errore è comune e ricorrente in molti: confusione tra forza/accelerazione e velocità. Sembra che l'inversione di traiettoria sia

determinata nell'attimo in cui interviene una forza e non nell'attimo in cui la forza intervenuta ha fatto cambiare segno alla velocità. Questo punto va discusso in classe, anche se con certi gruppi e singoli è già stato messo in chiaro durante il lavoro di questi giorni.

Si fa in conclusione riferimento ancora una volta alla posizione di equilibrio in cui le due forze si equivalgono. Da notare che in questo gruppo, rispetto alle domande della volta precedente, vengono corretti alcuni svarioni, tipo la scissione tra la forza peso e quella della massa.

**8:** vengono indicate le due forze (peso ed elastica) e nuovamente enunciata la condizione di equilibrio. Non sono presenti grafici o andamenti temporali. Si attribuisce l'oscillazione al non equilibrio delle forze "che continueranno ad essere una maggiore dell'altra" precisando che il corpo scende quando è maggiore la gravità rispetto alla forza elastica e viceversa. Vale il commento fatto per l'elaborato 7

## **CONCLUSIONI**

Gli elaborati presentano spunti interessanti che vanno raccolti e discussi in classe alla presenza di tutti ed in forma anonima in modo da procedere ad una sistemazione e compartecipazione di tutti dei saperi espressi.

La proposta potrebbe essere quella di integrare a questa discussione una esemplificazione di come poter mettere giù ordinatamente i grafici di  $a, s, v$  nel tempo.... Più che altro... mostrare con ordine e semplicità come si possano costruire simultaneamente a partire dalla analisi dei punti notevoli del moto (cima, fondo, equilibrio) e dalla unione di essi con una curva "sensata" e non troppo irregolare.

A ciò si potrebbe far seguire l'elaborazione grafica dei dati raccolti dal gruppo 5 che inviterei a descrivere alla classe -motivandola- la procedura seguita e, a margine, si potrebbe aggiungere una chiacchierata di un paio di minuti sull'errore sperimentale sulla singola misura. Una volta dedotta la legge di elongazione con la molla, si può procedere con il materiale della dispensa scritta e poi passare alla risoluzione dell'equazione del moto che introduce al problema matematico vero e proprio. La fisica verrà ripresa poi per descrivere, a partire da due moti periodici monodimensionali, quello del pendolo.

SCHEDA 2Attività da svolgere in laboratorio di informatica

Partiamo dalla considerazione di una parte di un foglio di lavoro in excel che descrive la variazione nel tempo di posizione, velocità e accelerazione di una massa appesa a una molla e libera di oscillare lungo la verticale.

tempo	posizione	velocità	accelerazione	intervallo	iterazioni	massa	k
0	1	0	-2	0,02		1	2
0,02	0,9996	-0,04	-1,9992	0,02	1	1	2
0,04	0,9984002	-0,08	-1,99680032	0,02	2	1	2
0,06	0,9964011	-0,1199	-1,99280224	0,02	3	1	2
0,08	0,9936042	-0,1598	-1,987208319	0,02	4	1	2

Come è stato ottenuto questa parte di foglio di excel?

Ricordiamo che vogliamo avere un'idea di come variano posizione, velocità e accelerazione di una massa appesa a una molla libera di oscillare lungo la verticale. Per raggiungere quest'obiettivo, abbiamo scelto di utilizzare le formule del moto uniformemente accelerato, applicandole, però, per intervalli di tempo opportunamente piccoli.

Fissiamo i seguenti parametri:  $x_0 = 1$  posizione di partenza;  $v_0 = 0$  velocità iniziale; ampiezza dell'intervallo di tempo: 0,2; massa appesa alla molla:  $m = 1$ ; costante elastica della molla  $k = 2$

Come calcolare, in ogni intervallo di tempo, i nuovi valori della posizione, della velocità e dell'accelerazione? L'idea è la seguente:

$$x_{n+1} = x_n + v_n t + 0,5 \left( -\frac{k}{m} \right) x_n t^2 \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + \left( -\frac{k}{m} \right) x_n t \quad ; \quad a_n = \left( -\frac{k}{m} \right) x_n$$

Abbiamo usato gli indici  $n+1$  e  $n$  per indicare, rispettivamente, i valori successivi e precedenti delle grandezze in gioco. Prima di impostare il foglio di lavoro in excel, calcolate manualmente  $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, a_0, a_1, a_2, a_3$ .

Sulla relazione che consegnerete alla fine dell'ora riportate:

- i valori di  $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, a_0, a_1, a_2, a_3$  calcolati manualmente
- eventuali difficoltà incontrate nella formattazione del foglio
- eventuali difficoltà legate alla comprensione del modello
- eventuali considerazioni sull'affidabilità del modello

SCHEDA 2 bis

Scopo di questa scheda è quello di rendere operativi gli studenti sul modello di simulazione costruito, facendo loro analizzare il comportamento del modello in relazione ad alcuni punti emersi negli elaborati della scheda 1. Attraverso queste attività si vuole promuovere inoltre una riflessione sul comportamento e sulle caratteristiche delle funzioni graficate.

*Osservazione: se il foglio di excel è formattato in modo conveniente, per variare un parametro ed avere la simulazione “in tempo reale” è sufficiente aggiornare l'intera colonna relativa a tale parametro.*

1. esegui una simulazione sufficientemente lunga da includere alcune oscillazioni complete delle funzioni. Che cosa puoi dire del periodo delle curve che rappresentano posizione, velocità ed accelerazione?
2. Osserva il valore dell'ordinata del massimo delle tra curve. Che cosa osservi in relazioni alle condizioni iniziali che hai assegnato?
3. prova adesso a variare solo il valore della massa (prova ad esempio dando  $m=1$  poi  $m=10$  poi  $m=100$ ). Che cosa osservi nel periodo?
4. ripeti la procedura del punto 3 variando questa volta il valore di  $k$  ed annota cosa osservi
5. utilizza ora un valore un “grande” per l'intervallo di tempo elementare: che cosa osservi? Ha senso in relazione a quanto hai osservato nella realtà? Prova a dare una motivazione di tale fenomeno.
6. prova a riassumere con parole tue quale è una buona procedura per utilizzare questa simulazione per avere risultati “sensati”
7. *facoltativo: fissa un valore per  $k$  (ad esempio  $k=1$ ) quindi esegui 6-7 simulazioni variando solo il valore della massa ed annotando ogni volta il valore del periodo che osservi. Prova quindi a fare un grafico nel quale metti in ascissa il valore della massa ed in ordinata quello del periodo. Che cosa osservi? Quale dipendenza potrebbe sussistere tra le due variabili?*

## ANALISI SCHEDA 2 Bis

*Scopo di questa attività è quello di esplorare il funzionamento della simulazione prodotta nel corso della Scheda 2, discutendone limiti e producendo congetture intorno al ruolo dei diversi parametri fisici nella realtà e nel modello matematico sviluppato. I puntini cui è articolato il lavoro vogliono solo suggerire i punti chiave di riflessione, lasciando libertà ai gruppi di documentare diversamente i risultati ottenuti. Si è in proposito riscontrato che alcuni hanno preferito riportare convenzionalmente su carta l'insieme delle ipotesi e delle discussioni sviluppate, altri hanno invece privilegiato un supporto informatico (file excel, documento word, breve presentazione power point) ritenendolo più adatto al tipo di attività proposto.*

### **Domanda 1**

**1:** vengono riportati in una tabella i valori degli zeri di velocità, posizione ed accelerazione. Correttamente viene osservato che il periodo delle tre grandezze cinematiche è lo stesso.

**2:** correttamente si indica che il periodo non cambia nelle tre funzioni, ma non viene fatta esplicita menzione di come sia stato ottenuto questo risultato. È chiaro, per chi abbia avuto modo di discutere con i vari gruppi durante il lavoro in laboratorio, che la misurazione è stata effettuata direttamente sul calcolatore. Verrà ulteriormente discussa in classe la necessità di produrre elaborati in sé compiuti, facilmente comprensibili (almeno nelle linee essenziali) anche da chi non abbia partecipato direttamente agli incontri. Compare un'affermazione formalmente sbagliata, anche se la radice dell'errore è comprensibile, legata all'affermazione: "le funzioni sono simmetriche rispetto all'asse delle x", con la quale si voleva verosimilmente indicare che il comportamento delle oscillazioni è identico nel semipiano positivo/negativo delle ordinate.

**3:** stesse considerazioni del gruppo 2

**4:** è l'unico gruppo a sostenere che gli andamenti non si ripetono con identico periodo ed porta a prova il confronto con la tabella di excel riportata. Il senso di questa affermazione è chiarito con una chiacchierata con i componenti del gruppo: avendo operato da subito con una simulazione piuttosto lunga, si è manifestato il fenomeno di divergenza dei picchi ed è quindi stata applicata tout court la definizione di funzione periodica, senza fare restrizioni sulla validità locale del modello.

### **Domanda 2**

**1:** viene correttamente individuata la corrispondenza tra massimi e zeri delle tra grandezze cinematiche. Durante la stesura di queste considerazioni, è emerso chiaramente in laboratorio non solo il riferimento alla lettura dei grafici ottenuti, ma pure la volontà/tentativo di riconciliare la cosa con il suo significato fisico legato all'oscillatore armonico.

**2:** "Le funzioni raggiungono il valore dell'ordinata massima e crescono sempre costantemente nel tempo": formalmente sbagliato. Verrà discusso questo punto per ricavare informazioni sull'errore commesso.

**3:** non si coglie qui il senso della domanda: non si confrontano gli andamenti dei tre grafici sovrapposti, ma si dà risalto alla comparsa di oscillazioni non smorzate

**4:** stesse considerazioni fatte per il gruppo 3: la motivazione viene però data nel confronto con i dati tabulati nella tabella excel allegata alla relazione.

### **Domanda 3**

**1:** correttamente viene segnalato che all'aumentare della massa, si ha un aumento del periodo.

La cosa viene motivata in maniera un po' vaga dicendo che "la massa è un fattore influente sul moto del corpo". Non vengono riportati a supporto della risposta dati numerici.

**2:** la situazione è descritta riportando schizzi a mano degli andamenti riscontrati con la simulazione. Si dice che al crescere della massa "accelerazione e velocità diminuiscono ancora rispetto al tempo". Si è posta l'attenzione sull'ampiezza delle oscillazioni e non sul periodo, sulla loro durata. Questa affermazione, non priva di un suo significato fisico ben preciso, verrà discussa nella lezione di analisi degli elaborati

**3:** laconicamente si dice che "il periodo, aumentando la massa, aumenta".

**4:** "con massa dieci il corpo si sposta della stesse misura, ma lo fa più lentamente, e questo si può vedere sia dalla velocità che ha valori inferiori, sia dal fatto che vi sono meno oscillazioni del parametro spazio nello stesso tempo. L'accelerazione ha una grandissima variazione all'inizio, una variazione di cui non bisogna tener conto nella simulazione di funzione periodica perché parte da una accelerazione di  $-2$ , che non può più mantenere aumentando la massa, e arriva alla accelerazione permessagli dalla massa; da qui in poi invece oscilla regolarmente (sempre con quell'errore fatto notare nell'esercizio 1&2.). Con la massa a 100 il corpo è talmente pesante e lento che con 500 dati per ogni parametro il corpo non completa neanche un'oscillazione nel tempo di analisi, il grafico dell'accelerazione è addirittura illeggibile, si nota solo che essa varia pochissimo e quello sbalzo già notevole con massa 10 è ancor più accentuato" La discussione porta a risultati formalmente corretti ed è qui interessante evidenziare come all'evidenza della simulazione, viene fatta sempre seguire una spiegazione fisica del fenomeno.

#### **Domanda 4**

**1:** si dice solo che, dipendendo il sistema anche dalla molla, i risultati cambiano al variare del  $k$  della molla, senza ulteriori precisazioni.

**2:** si dice che i valori di accelerazione, velocità e tempo aumentano. È qui implicito il solito riferimento all'ampiezza delle oscillazioni, mentre più incomprensibile risulta il riferimento al "tempo".

**3:** correttamente si afferma che "all'aumentare di  $k$ , diminuiscono i periodi".

**4:** "Aumentando  $k$  aumenta il numero di oscillazioni per ogni parametro, la variazione dello spazio rimane invariata ma aumenta quella della velocità e soprattutto quella dell'accelerazione. Inoltre aumenta l'errore (quello per il quale i valori non si ripetono uguali da oscillazione a oscillazione)". Pur con qualche imprecisione lessicale, viene qui messa in evidenza sia la dipendenza del periodo dalla costante elastica della molle, sia l'ampiezza delle oscillazioni.

#### **Domanda 5-6**

*Questa ultima fase della scheda vuole centrare il problema sul modello e sulla sua affidabilità: lo scopo è quello di far ulteriormente riflettere gli studenti sul significato intrinseco di periodo, come del tassello portatore di tutta l'informazione necessaria alla conoscenza della funzione. Tale punto verrà poi ripreso ed approfondito in sede di discussione dei risultati della scheda.*

**1:** si afferma solo che "un intervallo di tempo relativamente breve potrebbe essere abbastanza affidabile". Non vengono fatte ulteriori considerazioni di merito

**2:** si osserva che "i valori aumentano in un punto comune dopo lo zero" e che "una buona procedura per avere risultati sensati è considerare un intervallo di tempo molto piccolo e prendere in considerazione un notevole

numero di dati”. Sostanzialmente corretto, anche se manca un preciso riferimento al periodo e quindi un criterio per stabilire quanto debba essere piccolo l’intervallo considerato.

**3:** “non ha senso nella realtà perché in un intervallo di tempo così grande, l’errore è notevole dato che consideriamo il moto della molla uniformemente accelerato, mentre in realtà passa da un minimo ad un massimo” ed ancora “è necessario porre un intervallo di tempo breve perché altrimenti il nostro sistema considererebbe il moto della molla uniformemente accelerato mentre in realtà passa da un minimo ad un massimo”. Motivazioni corrette, che indicano lo sforzo di conciliare teoria ed osservazione sperimentale.

**4:** “Aumentando il periodo si nota chiaramente il difetto già evidenziato in precedenza del nostro modello, all’inizio le oscillazioni sono impercettibili, addirittura il grafico mostra una retta che coincide con l’asse delle x, poi si nota come le oscillazioni non siano ripetute uguali, ma i loro valori variano molto da un’oscillazione all’altra, la variazione aumenta ogni oscillazione. Questo succede perché è come se usassimo meno funzioni di secondo grado per rappresentare la funzione periodica e così facendo commettiamo più errori.” E ancora ... “Una buona procedura è quella di usare valori di massa, k e intervallo piccoli, perché con massa e k piccoli riduciamo gli errori, usando numeri piccoli gli errori sono più piccoli, e con un numero piccolo che rappresenti l’intervallo di tempo riusciamo a rappresentare più dettagliatamente la funzione periodica, prendendo piccolissimi “tratti di parabola” per formare una funzione periodica, si rappresenta meglio che non prendendo grandi “tratti di parabola”. Inoltre bisogna utilizzare il maggior numero possibile di dati.” Qui si confonde il periodo con il tempo minimo della simulazione, ma la descrizione del fenomeno e la motivazione matematica fornita sono di ottimo livello e da portare alla discussione della classe.

*Complessivamente occorre lavorare su una riflessione collettiva degli spunti emersi da questi elaborati, con riguardo particolare per il periodo quale unità minima contenente tutta l’informazione necessaria.*

SCHEDA 2 bis

## Approfondimenti e commenti spediti o consegnati agli studenti

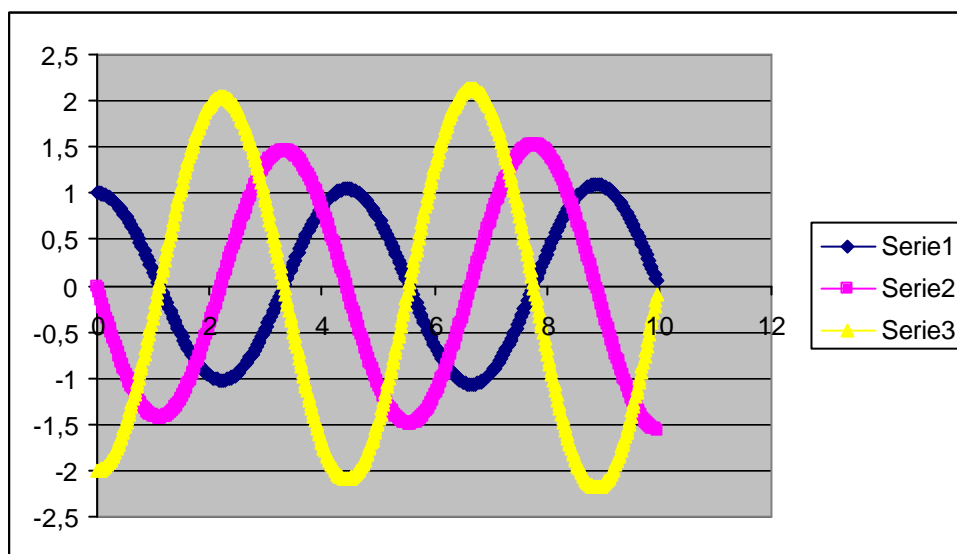
1. esegui una simulazione sufficientemente lunga da includere alcune oscillazioni complete delle funzioni.

Che cosa puoi dire del periodo delle curve che rappresentano posizione, velocità ed accelerazione?

Il grafico di EXCEL che allego è stato ottenuto da un foglio formattato come i vostri (chi desiderasse averlo me lo richieda). In esso sono state effettuate 500 iterazioni, in modo tale da avere due oscillazioni complete per ciascuna delle grandezze (posizione, velocità e accelerazione).

La curva in blu rappresenta l'andamento della posizione rispetto al tempo, quella in rosa l'andamento della velocità rispetto al tempo e quella in giallo l'andamento dell'accelerazione.

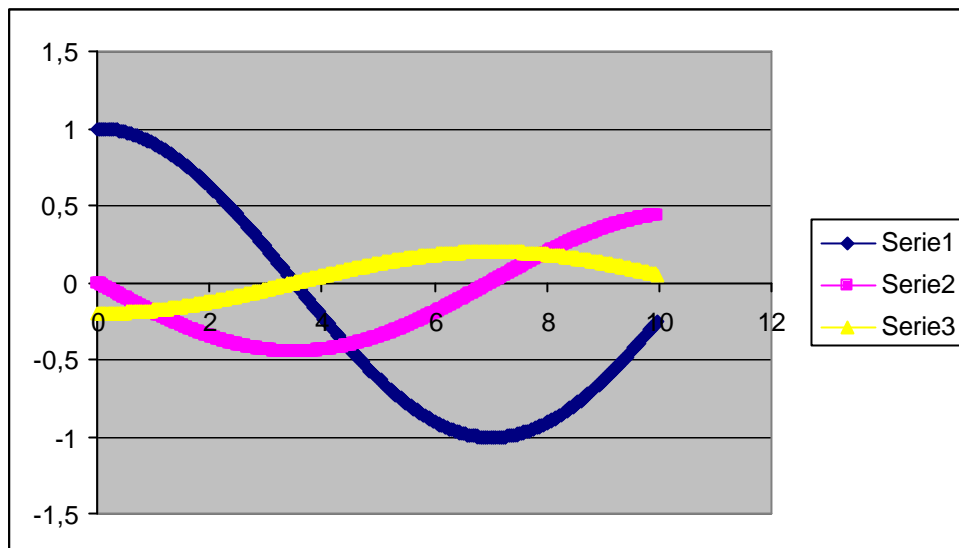
Come si può notare il periodo delle tre funzioni (posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo) è lo stesso.



2. Osserva il valore dell'ordinata del massimo delle tra curve. Che cosa osservi in relazioni alle condizioni iniziali che hai assegnato?

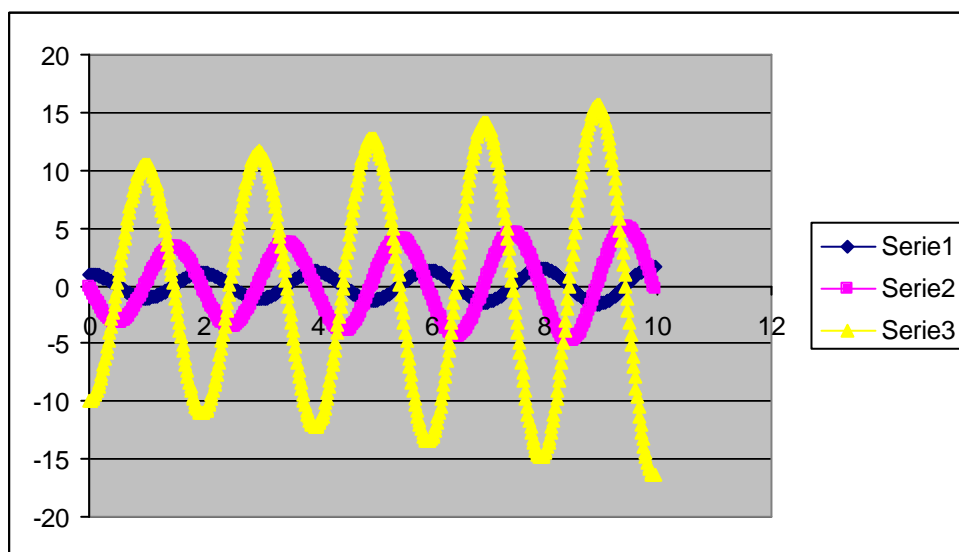
I massimi sembrano aumentare; è come se lo spostamento della massa rispetto alla sua posizione di equilibrio aumentasse nel tempo. Ovviamente ciò non può corrispondere alla situazione reale (alla massa è stata conferita una determinata energia per portarla a una unità di misura dalla sua posizione di equilibrio e, per il principio di conservazione dell'energia, questa distanza non può aumentare quando il sistema è lasciato libero di oscillare). È ovvio che il modello non funziona o, meglio, più aumentano le iterazioni, più dà valori che si allontanano da quelli reali. Ciò non è strano: abbiamo infatti supposto che l'accelerazione fosse costante, mentre sappiamo che così non è (l'accelerazione è infatti una funzione oscillante periodica). Supponendo l'accelerazione costante si fa un errore (tanto minore quanto più piccolo è l'intervallo di tempo che si considera); questo errore si propaga sulla velocità e sulla posizione; a loro volta questi errori sulla velocità e sulla posizione si propagano sull'accelerazione (infatti i successivi valori dell'accelerazione dipendono dalla posizione). Non è quindi strano che dopo un numero di iterazioni considerevole gli errori dovuti alle approssimazioni del modello comincino a farsi sentire. Come potete vedere, però, il modello consente di effettuare considerazioni qualitative (come la costanza del periodo e l'uguaglianza dei periodi delle tre grandezze) piuttosto interessanti.

3. prova adesso a variare solo il valore della massa (prova ad esempio dando  $m=1$  poi  $m=10$  poi  $m=100$ ). Che cosa osservi nel periodo?



Come potete osservare, per  $m = 10$  si ottiene un aumento di periodo di oscillazione: ora non abbiamo nemmeno un'oscillazione completa, mentre prima (per  $m = 1$ ) ne avevamo due complete. Il modello rispecchia proprio quanto si osserva nella realtà: aumentando la massa avevamo osservato che il periodo aumentava. Il moto si comporta come quello di una massa che voglia essere accelerata da una certa forza: aumentando la massa, a parità di tutte le altre condizioni, la massa impiega più tempo a raggiungere una certa velocità, ossia è più lenta. In termini più formale, dalla relazione  $a = -k \cdot x / m$ , si che aumentando la massa diminuisce l'accelerazione e quindi aumenta il periodo. Si noti, però, che il periodo è indipendente dalla posizione iniziale

4. ripeti la procedura del punto 3 variando questa volta il valore di  $k$  ed annota cosa osservi



Siamo passati da  $k = 2$  a  $k = 10$ . Il periodo è diminuito (è quindi aumentata la frequenza). Il motivo sta sempre nella relazione tra  $k$  e  $a$  ( $a = -k \cdot x / m$ )

5. utilizza ora un valore un "grande" per l'intervallo di tempo elementare: che cosa osservi? Ha senso in relazione a quanto hai osservato nella realtà? Prova a dare una motivazione di tale fenomeno. Chiaramente non ha senso attribuire valori "grandi" all'intervallo di tempo: abbiamo infatti visto che in questo intervallo assumiamo costante l'accelerazione (che costante non è): maggior è l'intervallo di tempo considerato, maggiori sono gli errori di approssimazione del modello e quindi maggiore è lo scostamento dai dati reali.
6. prova a riassumere con parole tue quale è una buona procedura per utilizzare questa simulazione per avere risultati "sensati"  
Scegliere un intervallo di tempo che sia piccolo rispetto al periodo (per esempio 1/1000 del periodo); non effettuare un numero eccessivo di iterazioni (ci si può accontentare di avere due oscillazioni complete).

Ovviamente per dire quanto è  $1/1000$  del periodo dovremmo avere un'idea di quanto è il periodo: per questo è possibile iniziare con qualche ragionevole tentativo ("piccoli intervalli di tempo in modo da ottenere almeno un'oscillazione completa, stima del periodo, determinazione di un eventuale intervallo di tempo più adeguato... e così via)

7. *facoltativo: fissa un valore per  $k$  (ad esempio  $k=1$ ) quindi esegui 6-7 simulazioni variando solo il valore della massa ed annotando ogni volta il valore del periodo che osservi. Prova quindi a fare un grafico nel quale metti in ascissa il valore della massa ed in ordinata quello del periodo. Che cosa osservi? Quale dipendenza potrebbe sussistere tra le due variabili?*

L'idea è quella di ricercare una relazione tra massa e periodo per fissati valori di  $k$ .

Poiché nessuno ha svolto l'esercizio facoltativo, invitiamo a farlo e a inviare eventuali riflessioni per e-mail.

## RIFLESSIONI RECAPITATE VIA EMAIL DA UN GRUPPO DI LAVORO

*Scheda 2*

A)  $x_1=1$   $x_2=0,9996$  in allegato il foglio di calcolo

B) All'inizio abbiamo considerato  $t$  come tempo e non come intervallo di tempo, ma poi abbiamo corretto l'errore perché abbiamo compreso il modello. Il modello da noi adottato si basa sull'ipotesi di poter ricondurre una funzione periodica a tante piccole funzioni di secondo grado di cui conosciamo molto di più. Un difetto di questo metodo può essere per esempio che a vista una funzione periodica può essere ben rappresentata da più funzioni di 2° grado, ma magari facendo questo si compiono errori che a noi sembrano insignificanti ma che magari, ripetuti possono invece portare ad errori notevoli. Bisognerebbe dunque cercare di tener conto in qualche modo dei piccoli errori singoli commessi e annotarli vicino al risultato finale, ipotizzando un valore di errore totale ( per esempio: " TOT cm ogni TOT secondi per la posizione ).

*Scheda 2bis*

1&2) Abbiamo notato che mentre nella funzione periodica i valori dovrebbero ripetersi uguali nelle diverse oscillazioni, qui questo non succede, sicuramente perché questa non è una funzione periodica, ma solo un qualcosa di più comprensibile per noi che dobbiamo rappresentarla. Ci siamo resi conto di questo vedendo che i valori dei "picchi" dell'oscillazione col tempo aumentavano di valore nei valori positivi e diminuivano nei valori negativi, poi abbiamo controllato nelle tabelle dei valori e ne abbiamo avuto conferma (questo succede poiché in ogni intervallo abbiamo considerato che l'accelerazione fosse costante ossia fosse un moto uniformemente accelerato)

3) con massa dieci il corpo si sposta della stesse misura, ma lo fa più lentamente, e questo si può vedere sia dalla velocità che ha valori inferiori, sia dal fatto che vi sono meno oscillazioni del parametro spazio nello stesso tempo. L'accelerazione ha una grandissima variazione all'inizio, una variazione di cui non bisogna tener conto nella simulazione di funzione periodica perché parte da una accelerazione di  $-2$ , che non può più mantenere aumentando la massa, e arriva alla accelerazione permessagli dalla massa; da qui in poi invece oscilla regolarmente ( sempre con quell'errore fatto notare nell' esercizio 1&2.). Con la massa a 100 il corpo è talmente pesante e lento che con 500 dati per ogni parametro il corpo non completa neanche un'oscillazione nel tempo di analisi, il grafico dell'accelerazione è addirittura illeggibile, si nota solo che essa varia pochissimo e quello sbalzo già notevole con massa 10 è ancor più accentuato.

4) Aumentando  $k$  aumenta il numero di oscillazioni per ogni parametro, la variazione dello spazio rimane invariata ma aumenta quella della velocità e soprattutto quella dell'accelerazione. Inoltre aumenta l'errore ( quello per il quale i valori non si ripetono uguali da oscillazione a oscillazione).

5) Aumentando il periodo si nota chiaramente il difetto già evidenziato in precedenza del nostro modello, all'inizio le oscillazioni sono impercettibili, addirittura il grafico mostra una retta che coincide con l'asse delle  $x$ , poi si nota come le oscillazioni non siano ripetute uguali, ma i loro valori variano molto da un'oscillazione all'altra, la variazione aumenta ogni oscillazione. Questo succede perché è come se usassimo meno funzioni di secondo grado per rappresentare la funzione periodica e così facendo commettiamo più errori.

6) Una buona procedura è quella di usare valori di massa,  $k$  e intervallo piccoli, perché con massa e  $k$  piccoli riduciamo gli errori, usando numeri piccoli gli errori sono più piccoli, e con un numero piccolo che rappresenti l'intervallo di tempo riusciamo a rappresentare più dettagliatamente la funzione periodica, prendendo piccolissimi "tratti di parabola" per formare una funzione periodica, si rappresenta meglio che non prendendo grandi "tratti di parabola". Inoltre bisogna utilizzare il maggior numero possibile di dati.

*[segue la tabella excel con tutti i dati della simulazione!]*

SCHEDA 3

*Il moto e la variazione di posizione nel tempo in un moto rettilineo ... differenze tra traiettoria e legge oraria (lavoro individuale e in piccoli gruppi di 4 studenti i primi quattro esercizi sono soprattutto rivolti agli studenti che non hanno fatto fisica)*

1. A turno, ciascun coordinatore di ogni gruppo deve muoversi rispetto al sensore, osservando la traccia del proprio movimento proiettata su un muro dell'aula grazie al view screen posto sulla lavagna luminosa e collegato alla calcolatrice. Tutti gli studenti devono osservare attentamente, dal proprio banco, il movimento dei coordinatori e la traccia descritta sul muro dell'aula. Non parlate delle vostre osservazioni e delle vostre idee con i compagni; limitatevi a osservare e a pensare. Avrete tempo di discutere dopo.
2. Al termine del movimento dei 5 coordinatori, riunitevi nei gruppi di lavoro per riflettere e discutere nel vostro gruppo su quanto avete fatto o avete visto fare. Cercate di produrre qualche ipotesi (o di confrontare quelle eventualmente già pensate individualmente durante la precedente attività) sul come e perché il movimento era legato al grafico osservato sul muro.
3. La seguente attività deve essere effettuata da uno studente per ciascun gruppo, che non sia il coordinatore. Questo studente deve muoversi rispetto al sensore che, però, non è in funzione. Tutti gli altri studenti devono cercare di disegnare, sul proprio foglio, un grafico "spazio - tempo" simile a quello che si sarebbe prodotto sul muro se il sensore fosse stato in funzione. Subito dopo, lo stesso movimento prima eseguito senza sensore in collegato deve essere ripetuto con il sensore in funzione. Tutti gli studenti devono confrontare la traccia proiettata sul muro con il grafico posizione - tempo disegnato prima sul foglio.
4. In ciascun gruppo di lavoro rispondete, per scritto, alle seguenti domande: quando si ha un segmento orizzontale? Quando si ha un segmento obliquo che sale e quando un segmento obliquo che scende? Quando si ha una curva che sale? E quando si ha una curva che scende? Quando si ha una curva a  $\cup$ ? E quando invece si ha una curva a  $\cap$ ?
5. Riprodurre un moto che sia simile a quello di una molla ... quali accorgimenti? Perché?

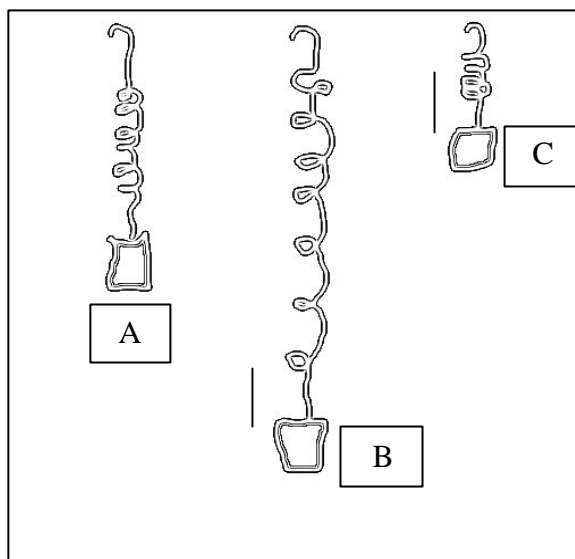
SCALETTA LEZIONE DIALOGATA

## 1. Discussione dei risultati emersi dallo svolgimento della scheda 1:

- a. sistemazione del seguente errore ricorrente in molti elaborati: *le forze che agiscono nel sistema sono 4: forza di gravità verso il basso il peso della massa verso il basso e che attaccato alla massa fa sì che si allunghi l'attrito dell'aria che agisce verso l'alto appena il peso viene attaccato alla molla. Essendo la molla dotata di elasticità il peso tende a cadere (se la molla non fosse dotata di elasticità il peso agirebbe lo stesso verso il basso ma senza cadere) e durante la caduta l'attrito dell'aria si oppone al moto contribuendo insieme al sostegno a far sì che la molla si stabilizzi il sostegno al quale viene agganciata la molla*
- b. analisi dei seguenti elaborati relativi alla Domanda 2 della scheda 1, ritenuti significativi per via dei due diversi approcci mostrati alla questione:
  - i. *mettendo in moto il sistema si interviene sull'equilibrio delle due forze. Nel momento in cui si imprime al corpo una forza la molla si allunga maggiormente esercitando quindi una forza maggiore sul corpo. Se il corpo viene lasciato le due forze non si equivalgono determinando quindi uno spostamento del corpo verso l'alto con velocità  $V$ . tale velocità fa sì che il corpo superi la posizione di equilibrio che aveva in stato di quiete fino ad azzerarsi a causa della forza di gravità. In questo momento il peso del corpo ha forza maggiore rispetto a quella della molla e ne causa la caduta con velocità  $v_1$  la quale viene azzerata dalla forza elastica della molla. Questo è un moto periodico e contribuirebbe all'infinito nel caso mancassero attriti che rallentano il sistema*
  - ii. *se io aggiungo forza al sistema (tiro giù il peso) la molla comincia ad oscillare e in assenza di attrito continuerebbe ad oscillare. Se io tiro giù la molla e la tengo giù è come se aggiungessi massa e la molla si allunga e il sistema è in equilibrio, nel momento in cui lo lascio non c'è più la forza che faceva allungare la molla fin dove l'avevo tirata giù, allora torna su, tende a tornare alla lunghezza che deve avere con il peso che ho attaccato. La molla oscilla ancora su e giù perché c'è comunque una forza che io ho aggiunto al sistema che viene pian piano esaurita dall'attrito.*
- c. Discussione della seguente affermazione prodotta dal gr. 8 in merito alla domanda 3:
  - i. *"...la velocità è negativa quando la molla si allontana dall'equilibrio e positiva quando si avvicina"*  
Conviene qui precisare come l'inversione di verso nel moto non coincide in generale con l'istante di applicazione di una forza in senso inverso.
- d. Si chiede al gruppo che ha preso le misure di allungamento rispetto al peso di raccontare la procedura e vengono precisate alcune questioni riguardanti, eventualmente, l'errore sperimentale sulla singola misura ed il significato di misura in fisica. Si graficano i dati e ci si convince della legge lineare trovata
- e. Deduzione della legge Hooke come indicato dalle dispense consegnate

Consideriamo la situazione rappresentata in figura:

1. in A è rappresentato l'equilibrio raggiunto dalla molla cui è appesa la massa  $m$
2. in B un generico istante del moto della massa  $m$  verso l'alto
3. in C un generico istante del moto della massa  $m$  verso il basso



Quello che ci tocca fare ora è cercare di raccogliere tutte le osservazioni sperimentali e dare loro una “veste matematica coerente”, come si suole dire.

E' questo un lavoro di traduzione vero e proprio, non dissimile da quello che si incontrerebbe nel tentativo di riportare un racconto da una lingua sconosciuta nella propria lingua madre, assistendo ad una sua rappresentazione teatrale. E' per questo che la studio e lo sviluppo della fisica vivono in un perenne rapporto di conflitto con la matematica. Da un lato la matematica

vive una sua esistenza di lingua autonoma, con precise regole ortografiche e sintattiche che le danno possibilità di raccontarsi e raccontare, al limite, di un suo mondo immaginario, dall'altro, subisce le continue pressioni della realtà, che richiede di essere a sua volta raccontata e rappresentata. Così, al modo in cui in una lingua ci sono neologismi, che spesso altro non sono se non composizioni, rielaborazioni di parole pre-esistenti al fine di costruirne una terza efficace e descrittiva (es. taglia-carte, e-mail ecc.), in fisica si fa qualcosa di analogo coinvolgendo nella descrizione di un fenomeno quelle grandezze che ci paiono caratterizzarlo completamente e cercando una convincente ortografia che le leghi, quella che la matematica chiama funzione.

Nel lavoro svolto sino a questo punto, ci siamo soffermati sull'oscillazione di una massa appesa all'estremo libero di una molla, dandone una descrizione, per quanto possibile precisa nel linguaggio comune, che ci permettesse sia di discutere quali tra le grandezze coinvolte (massa, dimensioni della molla, attrito dell'aria ecc.) siano a prima vista più significative. Questo, fra l'altro, ci ha permesso di formarci alcune “aspettative” in merito al comportamento del sistema (si pensi ad esempio ai grafici prodotti per descrivere la posizione della massa  $m$  nel tempo, la sua velocità ecc.) che dovremo utilizzare per costruire il nostro “modello matematico” del fenomeno.

Un primo passo in questa direzione è già stato compiuto: attraverso un'osservazione sperimentale più “quantitativa” ed attraverso la rappresentazione cartesiana dei dati raccolti, ci siamo convinti che la forza espressa dalla molla dipende con legge lineare dal valore del suo allungamento  $x^2$ . In altri termini, se per sorreggere una massa  $m$  la molla si è allungata<sup>13</sup> di una quantità  $x$ , per sorreggere una massa  $2m$  si dovrà allungare di  $2x$ .

Ciò può essere sufficiente per dare una descrizione del comportamento statico (ossia non in oscillazione) della molla: facendo misure più accurate e calcolandosi in qualche modo dal grafico il coefficiente di proporzionalità si giunge a caratterizzare completamente la molla e ad avere un criterio (modello) per fare previsioni circa l'allungamento della molla sottoposta a sollecitazioni diverse.

Discorso a parte merita il caso delle oscillazioni. Già dai grafici che abbozzano la posizione di  $m$  nel tempo si vede che il comportamento da descrivere presenta un diverso grado di complessità: non una retta... ma qualcosa che cresce e decresce, poi al limite si smorza se ci vogliamo mettere anche la resistenza dell'aria.

Occorre una riflessione preliminare sui casi B e C della figura precedente. In entrambe le situazioni la molla risulta allungata e quindi sembrerebbe esercitare una trazione sulla massa: tuttavia, in un caso...  $m$  sale, nell'altro scende. Si potrebbe obiettare che non è la sola forza della molla ad essere coinvolta nel fenomeno, dovendosi tenere conto pure della forza di gravità ( $mg$ ). Ciò non risolve di per sé la questione poiché sia nel caso A che nel caso B, la forza di gravità (di valore costante  $mg$ ) tenderebbe a tirare verso il basso la massa. Ci sono allora due possibilità: o le conoscenze che abbiamo ricavato dall'osservazione del fenomeno non sono sufficienti (e allora bisogna escogitare qualcosa) oppure non stiamo mettendo insieme le cose come si dovrebbe. Prima di lanciarsi in

<sup>12</sup>  $F_{molla}=kx$  dove  $k (>0)$  è la costante di proporzionalità che può variare da molla a molla

<sup>13</sup> È bene tenere presente che per allungamento non intendiamo la lunghezza complessiva della molla, ma la sua variazione (dovuta alla massa  $m$  che deve sorreggere) rispetto alla situazione di riposo. D'altra parte... è forse naturale convincersi che sia proprio questo allungamento la grandezza “significativa” da studiare visto che, una volta appesa la massa  $m$  quello che vien da dire osservando il sistema è che la “molla si è allungata”: nessuno, descrivendo al telefono il fenomeno, direbbe “la molla è lunga 10 cm”...

astruse congetture e di immaginare nuovi complicati esperimenti è bene vedere se, dalle conoscenze acquisite, si sono tirate proprio tutte le conclusioni possibili.

Procediamo scrivendo “formalmente” tutto quello che sappiamo e vediamo cosa otteniamo...<sup>14</sup>

Per semplificare la notazione consideriamo trascurabile (idealmente nulla) la lunghezza a riposo della molla.

Scriviamo le relazioni che legano le forze nei tra casi:<sup>15</sup>

A: equilibrio.

$$kL_0 = mg \quad 16$$

B: la massa è sottoposta alla forza dovuta dell'allungamento  $L_2$  della molla ed alla forza di gravità. Complessivamente, la forza cui è soggetta la massa ma vale:

$$F = kL_2 - mg$$

C: considerazioni analoghe al caso B portano a scrivere:

$$F = kL_1 - mg$$

D'altra parte, risulta evidente dalla figura che valgono le seguenti relazioni:

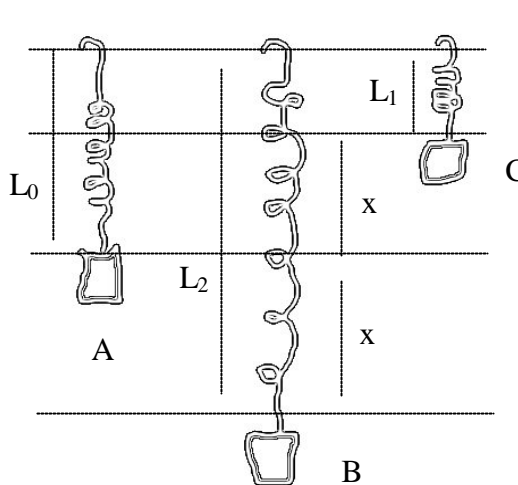
$$L_2 = L_0 + x$$

$$L_1 = L_0 - x$$

Andando a sostituire queste relazioni nelle espressioni ottenute per la forza  $F$  nei casi B e C si trova:

B:  $F = k(L_0 + x) - mg$  ?  $F = kL_0 + kx - mg$  ? (uso la relazione trovata in A)  $F = mg + kx - mg = kx$

C:  $F = k(L_0 - x) - mg$  ?  $F = kL_0 - kx - mg$  ? (uso la relazione trovata in A)  $F = mg - kx - mg = -kx$



Quello che risulta da queste relazioni ricavate con l'uso di un po' di algebra è che la massa è soggetta ad una forza  $kx$  (positiva, ovvero diretta verso l'alto, visto che  $x$  è una quantità positiva essendo una distanza) nel caso B, in cui si trova al di sotto della posizione di equilibrio e ad una forza  $-kx$  (negativa, ovvero diretta verso il basso) quando si trova nella posizione C, ossia al di sopra del punto di equilibrio.

Vediamo se il risultato ha senso alla luce di quello che sappiamo dall'osservazione diretta del fenomeno. Quando la massa, nel suo moto verso il basso, passa per il punto di equilibrio tende a scendere ancora per un certo tratto, rallentando sino a fermarsi per poi ripartire verso l'alto. Questo fatto è ben spiegato dalle relazioni che abbiamo trovato... infatti... una volta scesa al di sotto del punto di equilibrio, la massa risente (nel nostro modello) della forza  $kx$  (“verso l'alto”) che tende a rallentarla, sino a fermarla e poi a tirarla di nuovo su... facendole acquistare quella velocità che, passato il punto di equilibrio, verrà consumata dalla forza  $-kx$  diretta verso il basso. La cosa sembra funzionare. Vale qui la pena precisare un punto che spesso è frutto di confusione ed errori: il fatto che un corpo si muova in una certa direzione e verso non è legato al fatto che su di esso sia presente una forza. Se lancio una biglia sul biliardo... questa si muoverà (se ci dimentichiamo l'attrito) libera, non soggetta a nessuna forza. Casomai, la presenza di una forza su un corpo può produrre due effetti: farne aumentare o diminuire la velocità a seconda che sia diretta concordemente o meno al verso della velocità. Non a caso... la forza è legata all'accelerazione, ossia ad una “variazione di velocità” nel tempo...

Tornando alla questione di partenza, abbiamo scoperto che le informazioni a nostra disposizione erano sufficienti a descrivere il fenomeno... andavano solo sottoposte ad una giusta scrittura e rielaborazione formale... ossia andavano scritte matematicamente.

Un ultimo passo può ancora essere compiuto per completare il discorso. Come si vede, sembra che la forza cui è soggetta la massa  $m$  dipenda dalla posizione  $x$  rispetto al punto di equilibrio... per cui... è brutto (ma anche

<sup>14</sup> Uno dei punti “psicologicamente” più faticosi da superare in fisica è la tentazione di usare pesantemente le proprie esperienze quotidiane per risolvere i problemi... col rischio di applicare le proprie conoscenze reali a modelli che, invece, non le contengono... giungendo a conclusioni assurde...

<sup>15</sup> La scelta dei segni delle forze è stata fatta considerando “positiva” la direzione verso l'alto... Analoghe relazioni si sarebbero potute scrivere facendola scelta opposta... ottenendo identici risultati. Su questo aspetto, volendo, si può discutere a parte...

<sup>16</sup> ovvero, essendo nulla la risultante delle forze che agiscono sulla massa  $m$ , si può anche scrivere:  $0 = kL_0 - mg$

formalmente più complicato) mantenere due formule: una per quando si trova al di sopra ed una per quando si trova al di sotto della posizione di equilibrio... E' possibile compattare le due formule in una sola? A ben pensarci... sì... a patto di trovare il modo di scrivere in qualche modo questo stare sopra o sotto nel linguaggio della matematica. Pensiamo ai numeri reali: quelli positivi stanno "a destra dell'origine" (nel solito disegno con l'asse  $x$  che ha la freccia verso destra), "quelli negativi" stanno a sinistra... per cui se ci viene detto che " $x$  è un numero reale"... sapremo che  $x > 0$  o  $< 0$  a seconda che stia a destra o a sinistra. Bene... allora... mettiamo "lo zero", ossia l'origine del nostro asse di riferimento proprio nel punto di equilibrio della massa appesa alla molla e affermiamo che la forza  $F$  cui è soggetta la massa vale  $F = -kx$ , senza precisare nulla su dove stia la massa (sopra o sotto il punto di equilibrio). Vediamo se la cosa funziona: quando la massa "sta sopra" allora  $x > 0$  e la forza è  $-kx$  ( $< 0$ , verso il basso), viceversa, quando la massa "sta sotto"  $x < 0$  e la forza è  $-kx$  ( $> 0$ , verso l'alto). Sono queste proprio le conclusioni che avevamo tratto precedentemente... e che sono state condensate in un'unica relazione, a patto di inserire, come abbiamo visto, un opportuno sistema di riferimento cartesiano. Si noti anche la trasformazione concettuale che ha subito la  $x$ : è passata dal significato di "distanza" (quindi sempre positiva) a quello di coordinata (quindi positiva o negativa a seconda di come si colloca rispetto all'origine).

Al termine di questo analisi dettagliata del fenomeno si può enunciare la seguente proposta di modello matematico per descrivere il comportamento di una massa soggetta ad oscillazione per effetto di una molla. *"una massa  $m$ , attaccata ad una molla e messa in oscillazione a partire dalla posizione di equilibrio, si muove come se fosse soggetta ad una forza  $F = -kx$  dove  $x$  è la sua posizione, istante per istante, rispetto al punto di equilibrio e  $k$  è una costante, positiva, che dipende dalla molla".*

Ci occuperemo in seguito di come rendere ancora più quantitativo questo modello, attraverso una sua qualche rielaborazione matematica. In pratica, a partire da un dato fenomeno fisico... siamo riusciti a proporne una sua possibile scrittura-descrizione matematica... che ora verrà rielaborata in seno alla matematica (utilizzando tutto quanto essa ci può mettere a disposizione) per ricavare tutte le informazioni che stanno racchiuse nella nostra formulazione matematica del fenomeno e concluderemo poi, riconsiderando nuovamente le evidenze fisiche che abbiamo annotato (oscillazioni, smorzamento ecc.), la bontà ed i limiti della nostra stessa descrizione.

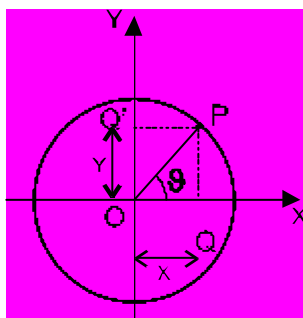
E' questo un tipico modo di procedere in ambito scientifico...

SCHEDA 4

- ❖ Considerate un punto P che si muove di moto circolare uniforme, su una circonferenza di raggio OP unitario, che chiameremo *circonferenza goniometrica*, e un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine nel centro della circonferenza. Quali condizioni bisogna precisare per fare in modo che l'angolo descritto dal punto P nel suo movimento individui univocamente il punto P nel piano cartesiano? Stabilite tali convenzioni, possiamo dire che le coordinate di P dipendono dall'angolo descritto dallo stesso? Giustificate le vostre risposte.
- ❖ Per misurare l'angolo vogliamo fare riferimento non all'usuale misura in gradi, (la cui unità di misura è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro o la centesima parte dell'angolo retto, a seconda del sistema di misura scelto) ma a una misura che risulta indubbiamente più comoda perché non necessita dell'introduzione di una nuova unità di misura (il grado), ma consente di misurare gli angoli a partire da misure di lunghezza. Per capire che cosa intendiamo segui il seguente ragionamento. Considera una qualunque circonferenza di raggio fissato. Possiamo dire, con le convenzioni stabilite nel precedente esercizio, che a ogni angolo al centro corrisponde uno e un solo arco percorso in senso antiorario dal punto P? Possiamo allora usare la lunghezza dell'arco percorso per misurare l'angolo? Confrontate le risposte con quelle dei vostri compagni di gruppo e riportatele, giustificandole, sul vostro foglio. Che cosa accade se il raggio della circonferenza cambia? Per rispondere aiutatevi considerando due o tre circonferenze concentriche a quella originaria. Usando la lunghezza degli archi, cambiano le misure degli angoli passando da una circonferenza a un'altra? Ma se vi ricordiamo che, dato un insieme di circonferenze concentriche di centro O e considerata una semiretta uscente da O che individua con ciascuna di queste circonferenze uno stesso angolo al centro, il rapporto tra la lunghezza degli archi corrispondenti a tale angolo e i raggi delle circonferenze è costante, che cosa possiamo fare per misurare gli angoli senza ricorrere a una nuova unità di misura (come il grado, per esempio)? Discutetene con i compagni di gruppo e riportate la vostra risposta sul foglio.
- ❖ La misura suggerita nel precedente esercizio si dice misura "in radianti"; il radiante è definito come quell'angolo i cui lati intercettano su una qualunque circonferenza, centrata nel suo vertice, un arco, che "rettificato", è lungo come il raggio. Da questa definizione possiamo dire che gli angoli vengono quindi rappresentati con numeri reali "puri" (senza dover ricorrere a una unità di misura)? Giustificate la risposta.
- ❖ Perché secondo voi si sceglie questo sistema di misurazione rispetto a quello in gradi? Quali sono i vantaggi? Esiste una relazione che lega i due sistemi di misurazione? Per rispondere, considerate qualche caso particolare partendo dalla circonferenza di raggio unitario (perché consideriamo la circonferenza di raggio unitario?), per esempio chiedetevi quanti radianti corrispondono a 360°, a 180°, a 90°, a 270°, a 30°... in generale, quale relazione lega fra loro la misura in gradi x di un angolo ai radianti (chiamiamo y il numero che indica i radianti)

Completate la seguente tabella:

<b>gradi</b>	<b>0°</b>	<b>18°</b>	<b>30°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>	<b>90°</b>	<b>120°</b>	<b>135°</b>	<b>150°</b>	<b>180°</b>	<b>270°</b>	<b>360°</b>
--------------	-----------	------------	------------	------------	------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------



- ❖ Chiediamoci ora, considerando la figura sopra, che cosa accade all'ascissa e all'ordinata di P quando P si muove sulla circonferenza. Come descrivereste il moto dell'ascissa Q e dell'ordinata Q'di P? Cercate di tracciare uno schizzo di come variano rispetto al tempo l'ascissa e l'ordinata di P (se riuscite, determinate qualche valore, per esempio per  $t=0$  [sec],  $t=\pi/6$ ,  $t=\pi/3$ ,  $t=\pi/2$ ,  $t=\pi$ , ...)
- ❖ Questi tre moti sono indipendenti tra loro o esiste qualche relazione che li lega? Giustificate le vostre ipotesi e congetture.
- ❖ Da quali parametri dipendono le coordinate del punto P?

## ANALISI ELABORATI SCHEDA 4

*Scopo di questa scheda è far lavorare gli studenti a gruppi intorno al concetto di radiante e, a seguire, sulla costruzione delle funzioni trigonometriche elementari. Tale attività verrà svolta attraverso l'indagine del moto di un punto su una circonferenza di raggio unitario e l'esplicitazione guidata delle caratteristiche essenziali di tale moto. In particolare, si cercherà di giungere alla raccolta di evidenze e congetture che siano direttamente confrontabili col caso unidimensionale rappresentato dall'oscillatore armonico. Ciò permetterà di saldare contesti esperienziali diversi attraverso la costruzione e l'esplorazione di situazioni periodiche legate inizialmente ad un fenomeno fisico ben definito, quindi alla sua simulazione al calcolatore ed infine ad una procedura formale di costruzione delle funzioni trigonometriche.*

**Domanda 1**

**1:** non viene riportato nessun disegno a supporto delle affermazioni. Si precisa la necessità di un sistema di riferimento che viene indicato come "asse cartesiano", poi di un non meglio precisato punto di partenza sull'asse  $x$  e di un verso. È chiaro, dagli schizzi presenti nella brutta copia, che il gruppo è giunto ad evidenziare gli aspetti significativi del problema, ma ne ha dato un'implicita ed un po' confusa narrazione. Sostanzialmente corretta la risposta anche alla seconda richiesta: è significativo il riferimento ad un approccio "fisico" al problema e quindi di tipo essenzialmente descrittivo: "... con tali convenzioni, una volta noto l'angolo, riusciamo fisicamente ad ottenere il punto P giacente sulla circonferenza..."

**2:** come nel caso dell'elaborato precedente, si dà risalto alla necessità di fissare un sistema di assi cartesiani e si propone di più una convenzione sulla scelta del verso della rotazione, attribuendo la positività a quello antiorario e la negatività a quello orario. La dipendenza delle coordinate dall'angolo viene discussa e documentata citando due casi notevoli, corrispondenti all'angolo di  $0^\circ$  e a quello di  $90^\circ$ . Anche in questo caso, nello scrivere le pure affermazioni, non si sente il bisogno di avvalersi di un disegno esemplificativo e necessario per fissare senza ambiguità le notazioni letterali utilizzate

**3:** la discussione si basa su un accurato disegno della situazione considerata cui però fa seguito una descrizione piuttosto artefatta ed involuta che fa pensare ad una procedura di costruzione di un segmento di lunghezza opportuna ed alla sua collocazione con un estremo nell'origine in modo da far coincidere l'altro estremo con il punto P sulla circonferenza. In questo è implicito che si sono individuate due grandezze in grado di descrivere il punto (raggio ed angolo), ma si è tradotta l'idea in modo pressoché incomprensibile. Viene poi avanzata una convenzione sul segno da attribuire agli angoli, ma pare a questo punto per il più una reminiscenza di altre letture.

Si individua correttamente la dipendenza tra angolo e posizione, ma non si tenta di dare una qualche motivazione, anche grafica, alla cosa: si capisce che il gruppo ha corrette intuizioni, ma emergono difficoltà espressive che non sempre sono superate da un corretto utilizzo di figure esemplificative.

**4:** è assente un disegno di riferimento, ma l'elaborazione è sostanzialmente corretta. La discussione sulla dipendenza delle coordinate del punto dall'angolo è assente, ma è inserita, in maniera un po' implicita nelle risposte alle domande successive, segno che era stata correttamente intuita.

**5:** è l'elaborato più completo: corretto il disegno e sostanzialmente precise le affermazioni. È interessante come, rispetto all'elaborato 1 in cui si fa riferimento ad una percezione fisica del fenomeno, qui si precisino le coordinate del punto come intersezione tra circonferenza e "retta individuata dall'angolo". Quest'ultima affermazione ha un profilo matematico notevole e vale la pena indagare la consapevolezza del gruppo in proposito.

**Domanda 2**

*Gli elaborati relativi a questa consegna risultano complessivamente più elaborati e corredati di una adeguata rappresentazione grafica della situazione in esame, come da richiesta esplicita del testo.*

**1:** sostanzialmente corretta la prima parte dell'affermazione, nella quale univocamente si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra archi di circonferenza (di raggio fissato) ed angoli al centro. Altrove si presenta una imprecisione linguistica laddove si dice che "per misurare un angolo in metri" occorre il raggio della circonferenza. Tale imprecisione è però frutto più della sottile manipolazione cui si sta sottoponendo l'interpretazione del fenomeno ed è per questo giustificabile. Di fatto, come mostra la successiva elaborazione, viene correttamente individuata l'indipendenza dell'angolo dalla scelta del raggio delle diverse circonferenze concentriche e correttamente è sancita l'indipendenza del rapporto tra la lunghezza dell'arco e del raggio, che viene proposta come nuova quantità per la misurazione dell'angolo stesso.

**2:** sostanzialmente corretta la corrispondenza tra lunghezza dell'arco percorso e posizione del punto P. Viene qui fatta menzione della periodicità del fenomeno, laddove si stabilisce una implicita relazione di equivalenza tra archi che si differenziano per numeri interi di circonferenze percorse. L'analisi della situazione su circonferenze concentriche di raggio diverso porta a conclusioni corrette, anche se esplicitate in maniera meno evidente che non nel caso del gruppo precedente.

Viene lasciata apparentemente in sospenso una possibile analisi condotta applicando il teorema di Talete.

**3:** l'affermazione è sintetica e corretta... ma non correttamente motivata. La ricerca esasperata della sintesi rischia di far perdere di rendere meno convincenti le motivazioni. In merito alla seconda questione relativa al caso di circonferenze concentriche, corretta è l'affermazione ma la sua motivazione viene lasciata un po' latente nella figura tracciata...

**4:** corretta la corrispondenza tra arco ed angolo al centro e corretta la conclusione tratta in termini del problema. L'analisi della situazione con circonferenze concentriche viene condotta in maniera appropriata, discutendo l'inadeguatezza della misura dell'arco come indice dell'angolo, in virtù della proporzionalità tra arco ed angolo attraverso il raggio. Viene correttamente individuato il radiante come numero puro (rapporto di lunghezze).

La discussione che chiama in causa la semiretta con origine negli assi coordinati sembra un po' una ripetizione confusa delle idee precedenti. Potrebbe però essere messa a confronto con l'idea maturata dal gruppo 5 in merito alla domanda 1 per un approfondimento della discussione nell'abito della geometria analitica.

**5:** viene correttamente individuata la relazione biunivoca tra angolo al centro ed arco in una circonferenza, e la cosa viene collegata alle coordinate del punto associato ad uno degli estremi dell'arco facendo nuovamente riferimento all'intersezione retta/circonferenza. La possibilità di sostituire all'angolo la misura dell'arco come indice della posizione del punto sulla circonferenza viene rinforzata indicando la diretta proporzionalità tra le due grandezze. Il caso di più circonferenze concentriche viene elaborato in maniera esauriente, indicando la variazione della lunghezza dell'arco al crescere del raggio ed a parità dell'angolo al centro e riconciliando la cosa con la scelta del rapporto tra arco e raggio che ripristina la relazione di biunivocità con l'angolo. Correttamente viene indicata tale grandezza come numero puro, in quanto rapporto di grandezze "che hanno la stessa unità di misura".

**Domande 3-4**

*Si richiede qui esplicitamente ai gruppi di condurre una analisi sulle dimensioni della nuova grandezza introdotta (ove già altrove tale analisi non sia stata prodotta come logica conseguenza del discorso) e di rendere operativa la definizione completando una tabella ove alcune conversioni grado-radiante sono proposte.*

**1:** viene correttamente motivata la natura del radiante come numero puro e corrette sono le conversioni effettuate

**2:** la motivazione è piuttosto decontestualizzata e poco convincente, essendo messa in relazione la misura del radiante con quella della circonferenza, attraverso una proporzionalità diretta non meglio precisata che non

spiega nulla delle dimensioni effettive degli oggetti manipolati. Corrette le conversioni dove emerge chiaramente l'identificazione simbolica del 180 col  $\pi$  al fine di rendere automatico il procedimento.

**3:** “non hanno un'unità di misura in quanto rapporti”: corretto, ma si richiede di essere più espliciti visto che manca l'idea di rapporto di grandezze omogenee. Corrette le conversioni, operate direttamente sulla fotocopia della scheda

**4:** correttamente motivato il radiante come numero puro, frutto del rapporto tra due lunghezze e correttamente svolto il compito legato alle conversioni grado/radiante

**5:** la questione legata al radiante come numero puro era stata già discussa in precedenza. Corretta la relazione proposta per la conversione gradi/radiani

### **Domande 5-6-7**

*L'attività conclusiva consiste nella produzione di grafici in grado di descrivere l'andamento delle coordinate del punto P al variare dell'angolo e quindi della sua posizione sulla circonferenza.*

*È questa un'attività mirata a preparare la riflessione conclusiva sulla periodicità (in questo caso il moto considerato è bidimensionale), smarcandola da un possibile sottinteso temporale legato all'uso, nel lessico corrente, di termini quali periodo. L'attività verrà poi ripresa in sede di discussione e gli andamenti qui riportati confrontati e discussi in relazione al problema fisico dell'oscillatore.*

*Nota: a causa di alcune assenze, i partecipanti residui del gruppo 1 sono confluiti in altri gruppi di lavoro.*

**2:** sono correttamente riportati gli andamenti dell'ascissa e dell'ordinata separatamente e poi simultaneamente in uno stesso sistema di riferimento cartesiano. A ciò è premesso uno schema del cerchio trigonometrico ove è indicato, quadrante per quadrante, il carattere crescente/decrescente dell'ascissa e dell'ordinata. Non viene però fatta esplicita menzione di una qualche relazione tra i due grafici sovrapposti.

**3:** sono riportati tre grafici: del rapporto ordinata/ascissa e separatamente dell'ascissa e dell'ordinata. Qualitativamente l'elaborato è convincente, ma mancano esplicite indicazioni della procedura seguita nella costruzione dei grafici (che solo si possono interpretare da una lettura critica dei fogli di brutta copia) e non sono chiaramente precisate le condizioni sotto le quali le coordinate del punto presentano andamenti funzionali di quel tipo. Non sono fatte considerazioni in merito ad una relazione tra le due curve

**3:** viene riportata correttamente la curva che descrive l'ascissa al variare dell'angolo, mentre mancano considerazioni o elaborazioni grafiche in relazione alle altre questioni proposte

**4:** non viene data una rappresentazione grafica di tipo cartesiano degli andamenti di ascissa ed ordinata al variare dell'angolo, cui viene preferita una descrizione, sotto forma di tabella, accanto al cerchio trigonometrico nella quale si indicano il carattere crescente/decrescente di ascissa ed ordinata.

SCHEDA 5

Possiamo formalizzare il discorso sia da un punto di vista prettamente fisico affermando che un moto circolare uniforme è equivalente alla composizione di due moti armonici lungo diametri perpendicolari, mentre dal punto di vista matematico, alla luce di quanto è emerso dalle congetture fatte in tutto il percorso, possiamo analizzare meglio il discorso:

consideriamo il raggio della circonferenza in questione come unità di misura dei segmenti; consideriamo inoltre un qualunque angolo orientato  $q$ , con il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle X. I punti rimangono P, Q, Q<sup>1</sup>; si danno le seguenti definizioni:

❖ Si chiama seno dell'angolo orientato  $q$ , e si scrive  $\sin q$ , l'ordinata del punto P; cioè:

$$\sin q = QP/OP = y_p$$

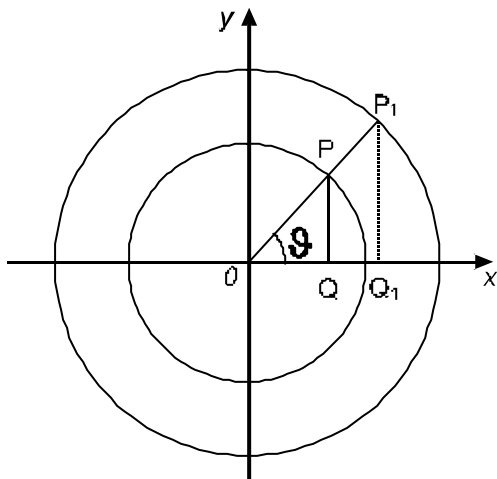
❖ Si chiama coseno dell'angolo orientato  $q$ , e si scrive  $\cos q$ , l'ascissa del punto Q; cioè:

$$\cos q = OQ/OP = x_q$$

N.B. essendo proiezioni è lecito anche poter scrivere:  $\sin q = Q^1O/OP$ , così pure  $\cos q = PQ^1/OP$ .

Osservando con spirito critico tali formule si può evincere che sia il seno che il coseno sono **numeri relativi**, quindi non ha senso parlare di unità di misura!

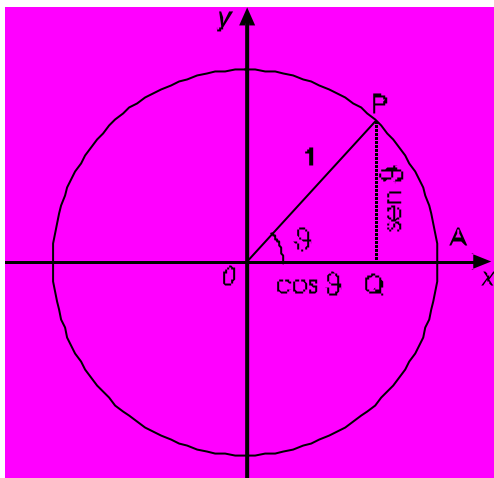
Inoltre è possibile notare che il seno e il coseno di un angolo orientato non variano al variare del raggio della circonferenza, ma sono funzioni continue che dipendono esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo orientato. Per convincerci di questa affermazione consideriamo la seguente figura:



Tali circonferenze concentriche, hanno evidentemente raggi diversi. Dalla similitudine dei due triangoli OQP e OQ<sup>1</sup>P<sup>1</sup> si deduce, in valore e segno:

$$\sin q = QP/OP = Q^1P^1/O1P^1 \quad e \quad \cos q = OQ/OP = OQ^1/O1P^1$$

Consideriamo la seguente figura: una circonferenza goniometrica, un angolo orientato  $\theta$ ; il triangolo rettangolo di cateti OQ e OP soddisfa il teorema di Pitagora:



$(OQ)^2 + (OP)^2 = 1$ , ma da quanto appena visto segue che:  **$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$**

Tale relazione chiamata anche fondamentale poiché permette di evidenziare che il seno e il coseno di un angolo orientato sono sempre numeri appartenenti all'intervallo chiuso  $[-1,+1]$ . Si ha quindi che:

$-1 \leq \sin\theta \leq +1$

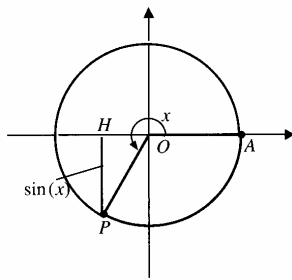
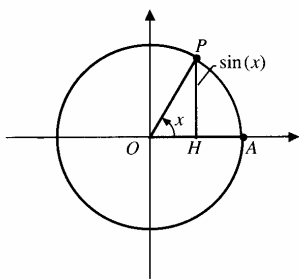
$-1 \leq \cos\theta \leq +1$

Badate bene quindi a non considerare plausibili uguaglianze del tipo:  $\sin\theta = 5$ ,  $\cos\theta = -3$ .

Queste funzioni che ci accingiamo a dar loro una rappresentazione grafica formale, hanno una proprietà evidente: la periodicità; vediamo le figure:

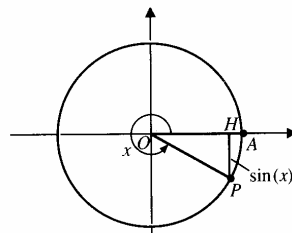
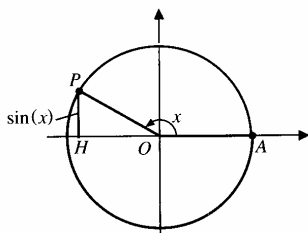
a) 1° quadrante:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

c) 3° quadrante:  $\pi < x \leq 3\frac{\pi}{2}$

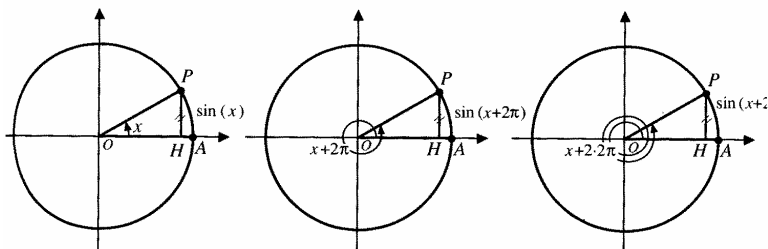


b) 2° quadrante:  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

d) 4° quadrante:  $3\frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi$



Rappresentazioni del seno nei diversi quadranti.

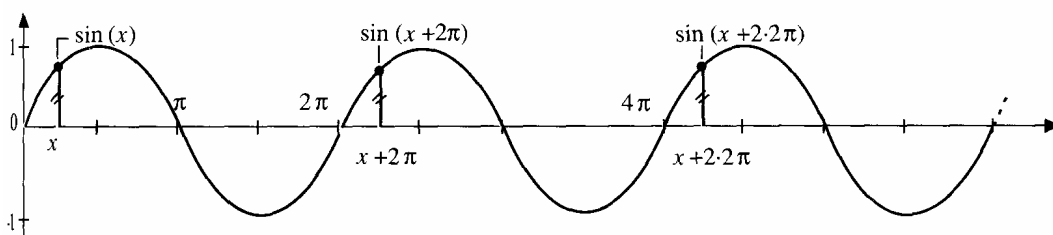


Periodicità della funzione seno.

In generale, per ogni n, appartenente ai numeri naturali, si può scrivere:

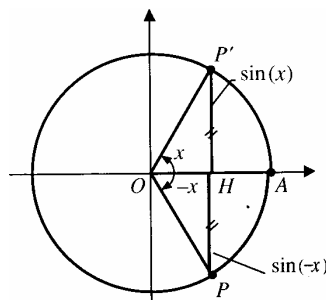
$$\sin(x + 2\pi \cdot n) = \sin x$$

Tale proprietà, di notevole importanza, è descritta nel seguente grafico cartesiano, riferito ad un sistema di assi:



Tutto ciò ci consente di affermare che tale funzione è periodica di periodo  $T = 2\pi$  radianti.

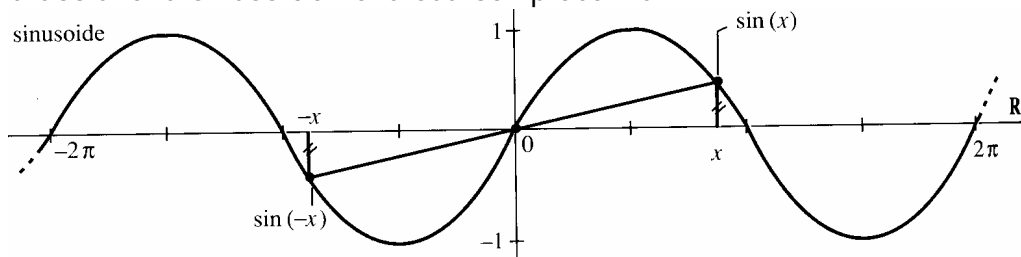
Osserviamo ora la seguente figura; se si suppone che il punto P si muova sulla circonferenza in senso orario, le ampiezze degli angoli al centro sono espresse in radianti "negativi" per cui si deduce che ogni ampiezza angolare negativa (-x), opposta a x, vale la relazione :



si deduce che sussiste la seguente relazione:

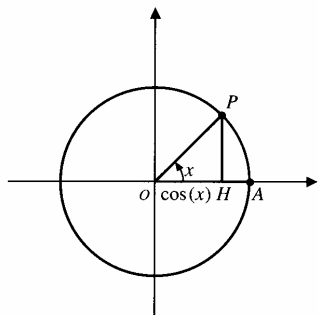
$\sin(x) = \sin(-x)$ , ovvero la funzione seno è dispari, ossia simmetrica rispetto all'origine.

Questo ci permette di estendere il dominio della funzione anche ai valori negativi degli angoli (cosicché tale dominio diventa tutto  $\mathbb{R}$ ) e di conseguenza possiamo tracciare la sinusoide nella sua completezza:

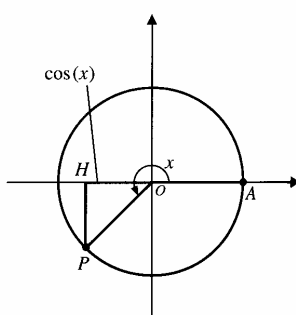


Analoghi ragionamenti si possono fare per la cosinusoide:

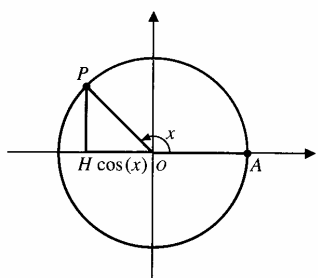
a) 1° quadrante:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$



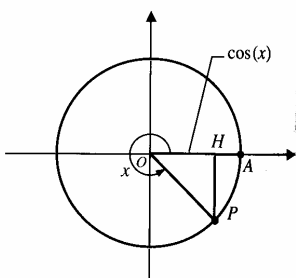
c) 3° quadrante:  $\pi < x \leq 3\frac{\pi}{2}$



b) 2° quadrante:  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

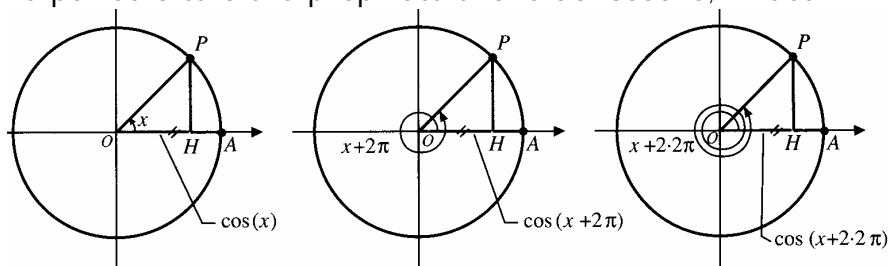


d) 4° quadrante:  $3\frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi$



Rappresentazioni geometriche di  $\cos(x)$  nei diversi quadranti.

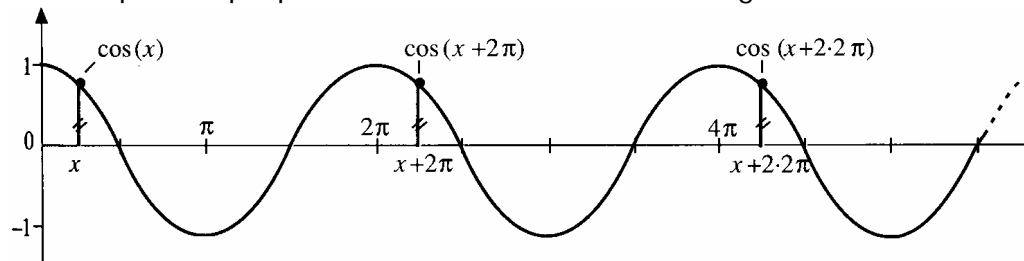
La periodicità   una proprietà anche del coseno; infatti:



In generale per ogni n, appartenente ai numeri naturali, si pu  scrivere:

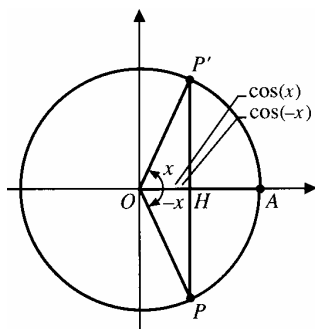
$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi \cdot n)$$

Anche qui tale proprietà notevole   illustrata nel grafico cartesiano della cosinusoide:



Analogamente, come per il seno considerando angoli negativi e osservando la seguente figura, si pu  ragionevolmente affermare che:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

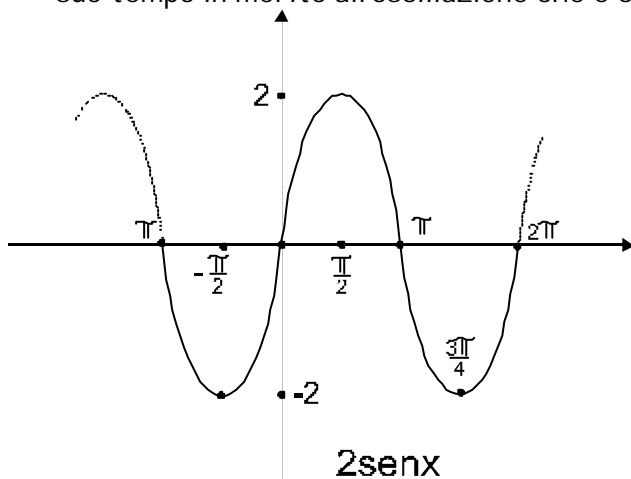


Anche per il coseno ha quindi senso ampliare il dominio anche a valori negativi degli angoli e poter tracciare la cosinusoide nella sua completezza:

Una volta fornite le conoscenze di base sulle funzioni trigonometriche, l'idea successiva è quella di esplorare le funzioni armoniche collegandone le proprietà considerate al fenomeno fisico dell'oscillatore armonico. Più generalmente il problema può essere formulato come segue: data una funzione  $y = f(t)$ , di tipo sinusoidale, studiarne il comportamento a seguito di trasformazioni del tipo  $y = A \cdot f(at+b) + B$  e darne una interpretazione fisica.

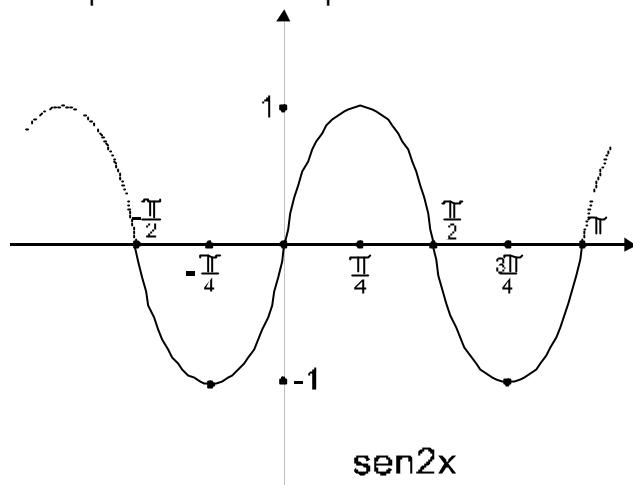
Abbiamo convenuto di affrontare l'azione dei parametri singolarmente:

1.  **$y = A f(t)$** . Abbiamo riportato varie casistiche, in relazione alla prima tipologia di funzioni sinusoidali; gli esempi a cui si chiede ai ragazzi una rappresentazione grafica con un collegamento fisico sono i seguenti:  $y = \text{sen}t$ ,  $y = 2\text{sen}t$ . Successivamente si fa loro discutere il collegamento con l'oscillatore, facendo riferimento, ad esempio, al grafico della posizione (ci sembra quello più intuitivo): la maggiore o minore ampiezza dell'oscillazione è collegata alla posizione iniziale da cui si rilascia la massa. Si può chiacchierare qui su come non vi sia dipendenza dalla massa, richiamando quanto visto a suo tempo in merito all'oscillazione che è compiuta intorno al punto di equilibrio.

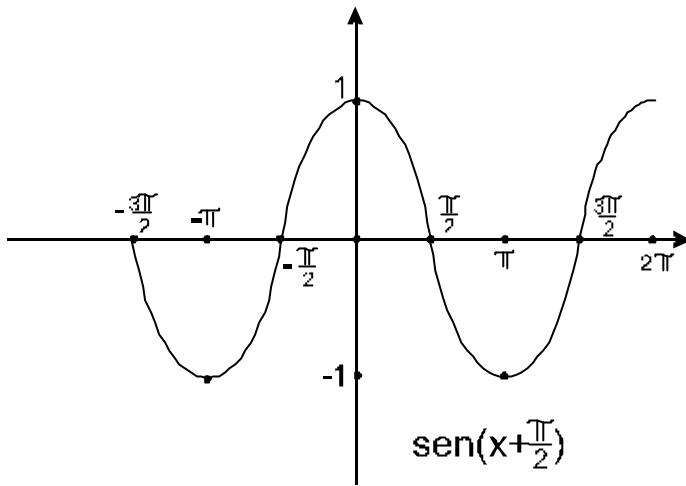


2.  **$y = f(at)$** . Anche in questo caso si propongono esempi concreti esemplificativi:  $y = \text{sen}2x$ ,  $y = \text{sen}1/2x$ , cercando di far emergere anche in questo caso collegamenti con l'oscillatore, per arrivare alla definizione di periodo e frequenza. Si dovrebbe subito giungere alla conclusione che aumentando  $a$  il periodo diminuisce e viceversa. Si prevede di ricollegarci alla fisica come segue: una diminuzione del periodo implica, a parità di allungamento iniziale, una rapidità maggiore di oscillazione, ossia: o una forza maggiore o una massa minore per cui nella soluzione fisica che descriverà le soluzioni

dovrà essere  $a(k,m)$ . Volendo dare una forma "polinomiale" a questa dipendenza...  $k$  starà a numeratore ed  $m$  a denominatore... anche se non si può dire nulla sugli esponenti... ossia si può loro far scrivere che  $a$  è del tipo costante  $\cdot (k/m)^{\text{un esponente}}$



3.  $y=f(t) + B$ : stessa procedura di prima. Variando i parametri della simulazione abbiamo constatato che non c'era modo di ottenere questo effetto. Si può chiedere di riflettere sul perché si disegnano due grafici di posizione uno con offset zero ed uno con offset  $B$  e di discutere sul significato dell'intersezione della curva con la retta. Si dovrebbe convergere facilmente sul fatto che questo offset è l'origine. Per cui, fisicamente...  $B$  c'è o non c'è a seconda di dove mettiamo l'origine e come tale non può dipendere dai parametri caratteristici del sistema (massa, gravità ecc.).
4.  $y=f(t+b)$  : dipendenza più delicata. Abbiamo deciso di far graficare un seno ed un coseno, e poi di agire su  $b$ ... e vedere cosa dicono. Dovrebbe emergere che variando  $b$  si trasla un seno su un coseno e viceversa per cui, seno e coseno sono la stessa cosa, a meno di una fase. Questo lo si ricollega da subito al cerchio trigonometrico: lì i ragazzi si convincono che la fase deve essere di  $90$ . Quando il punto giace sull'asse  $x$ , il coseno è  $1$  ed il seno è  $0$ . Si chiede quando i due si scambino i ruoli, ossia quando sia il seno a valere  $1$  ed il coseno  $0$ . Ciò avvenendo col punto sull'asse  $x$ , ossia dopo una rotazione di  $90$ . Fisicamente si ragiona al solito sulla posizione. Si tracciano due oscillazioni una che parte da  $(0,0)$  ed una che parte da  $(0,1)$  ad esempio, ove si intenda che l'una è ottenuta dall'altra solo per lo shift di fase che hanno appena visto. Si chiede di leggere cosa dicono i grafici del fenomeno...: uno descriverà il passaggio per l'origine al tempo zero, l'altro il passaggio per il punto  $1$  al tempo zero... quindi di nuovo si tratta solo di quando far partire il cronometro. Anche questo non deve dipendere dai parametri fisici.



## Lezione del 12-01-04

La lezione ha avuto inizio alle ore 11.00. La lezione è stata prevalentemente dialogata in alcuni momenti, mentre ha avuto un carattere frontale nella fase dell'approfondimento fisico effettuato da Federico. Ha condotto la prima parte della lezione Paola, mentre la seconda parte è stata condotta da Federico, il quale ha approfondito alcuni aspetti legati alla costante della molla e il periodo. Paola ha iniziato chiedendo : **“vorrei ragazzi che precisassimo insieme da cosa è descritto il moto della molla, preso in esame le volte precedenti; come voi stessi avete scritto nelle schede precedenti, tale moto è rappresentato dalle due consuete funzioni:  $\sin x$  e  $\cos x$ ; ragazzi voi avete già incontrato le funzioni seno e coseno; come quindi saprete esse sono funzioni reali ovvero hanno come dominio l'insieme dei numeri reali, mentre l'immagine di questi, ovvero il condominio è rappresentato dall'intervallo chiuso  $-1, 1$ . Ciò sta a significare che tali funzioni sono limitate, ovvero non può esistere un valore del seno e del coseno maggiore di uno e minore di meno uno. Grafichiamo il seno: emerge come questa funzione abbia la caratteristica di essere dispari, ovvero simmetrica rispetto ad un punto che è in questo contesto l'origine, mentre il coseno sia una funzione pari, ovvero abbia una simmetria rispetto all'asse  $y$ .”** I ragazzi hanno chiesto meglio di definire le differenze che esistono tra il concetto di funzione pari e dispari, e in merito a ciò è intervenuto Domingo a fare le dovute precisazioni mentre Paola ha esplicitato le relazioni formali ponendo come esempio  $x^3$ ; un ragazzo giustamente le chiede perché non potrebbe andare bene  $x$ , e qui Paola si accorge che poteva porre lei quell'esempio infatti tutto il discorso è così riassunto: **“ come potete constatare esistono altri esempi di funzioni che voi conoscete e che sono pari o dispari. Un esempio è la funzione  $x$  al cubo che chiaramente vedete risulta essere dispari, mentre  $x$  quadro ossia la classica parabola è un tipico esempio di funzione pari. Mi scusi Prof. ma  $x$  non può essere un esempio più semplice di funzione dispari? Hai ragione perfettamente.”** Successivamente con disinvoltura i ragazzi hanno disegnato sul loro quaderno le due funzioni, opportunamente incentivati con domande del tipo (in 0 il seno a che valore corrisponde? Ecc.. con il coseno).

Paola successivamente dopo aver disegnato il coseno e aver risposto ad una domanda sulla precisazione del grafico seno da parte di un ragazzo, pone il problema sulla diversità-affinità tra le due funzioni, ovvero afferma che le due funzioni sono la stessa cosa a meno di una traslazione opportuna; successivamente Paola specifica che partendo da funzioni note quali il seno coseno, si voglia generalizzare le medesime e vedere quali effetti produce.” **Bene ragazzi abbiamo disegnato le due funzioni: vedete delle analogie tra di esse? Se proviamo ad immaginare di traslare il seno sul coseno o viceversa cosa succede? Succede che le due funzioni si sovrappongono perfettamente e ciò ci dovrebbe suggerire che le due funzioni sono la stessa cosa a meno di una costante di traslazione. Ma allora quale è questa costante? Supponiamo di avere la nostra circonferenza goniometrica e di chiederci per quale angolo il seno assume il valore massimo: 90 gradi. Bene. Il coseno invece raggiunge tale valore quando l'angolo è zero o 360°. Ma allora il coseno di quanto dovrà spostarsi da tale posizione per raggiungere il seno e viceversa? Di 90°. Perfetto. Quindi possiamo affermare con ragionevole certezza che le due funzioni sono uguali a meno di una traslazione di 90°. Tutto chiaro? Ok. Iniziamo allora a approfondire alcuni aspetti di tali funzioni; iniziamo a graficare funzioni un poco più complesse di quelle iniziali: partiamo da  $2\sin x$ . Provate a suggerirmi il grafico che disegnerò alla lavagna evidenziando le differenze fisiche che emergono rispetto a  $\sin x$ .”** Intervengono come segue alcuni ragazzi: **“Per me il periodo aumenta; per me invece il periodo rimane inalterato ma aumenta la dimensione della funzione, ossia la punta max vale 2. Per me aumenta la velocità con cui la funzione cambia valore a parità di asse temporale.”** Domingo chiede di fare ulteriori congetture, discuterle e di provare a fare degli schizzi sul quaderno. Alcuni dicono: **“secondo il nostro parere aumenta la frequenza; per me la circonferenza che descriverebbe il moto ha raggio uguale a 2.”** Interviene Federico che riproponendo il modello dell'oscillatore, sfrutta la posizione, per chiarire come interviene il fattore amplificatore. **“Ragazzi vorrei farvi sottolineare come modelli di oscillatori simili ma con condizioni iniziali differenti danno luogo a valori relativi all'ampiezza di diverso valore; da ciò possiamo facilmente dedurre come le condizioni iniziali influenzano il moto dell'oscillatore e ciò lo avete anche potuto constatare osservando le simulazioni fatte al calcolatore nelle schede precedenti”**. Grafica alla lavagna la posizione dell'oscillatore al variare delle condizioni iniziali; fa vedere come sia proprio la costante moltiplicativa della funzione a far variare l'ampiezza. **“L'evidenza fisica, ha detto Federico, è che tale costante non dipende né dalla massa, né dalla costante e non incide sul periodo.**

**Un'ipotesi di lavoro, potrebbe quindi essere quella di valutare diverse costanti e vedere come si comporta il sistema.** Una ragazza ha chiesto precisazioni sul modello descritto da Federico ovvero come si deforma la molla variando la massa; Federico cogliendo la domanda ha risposto: **“ponendo i due modelli a confronto possiamo evincerci che le forze che agiscono sui due sistemi sono diverse”**. Domingo ha sottolineato ai ragazzi di cercare di cogliere a fondo gli aspetti fisici per formalizzare meglio quelli matematici. Federico ha precisato meglio il discorso traslazionale del seno sul coseno; ha quindi ripreso il fatto di quando è che le due funzioni combaciano, utilizzando anch'egli i vettori e la circonferenza goniometrica: Si è formalizzato scrivendo su suggerimento di una ragazza le formule di trasformazione del seno in coseno e viceversa. A questo punto è intervenuta Paola come segue: **“precisiamo meglio ragazzi la funzione di questa costante moltiplicativa: l'effetto che produce è una amplificazione della funzione di partenza anche se alcuni parametri, quali periodo, frequenza, rimangono inalterati. Ne siete quindi convinti? Possiamo procedere oltre? Ok. Analizziamo ora il comportamento del seno quando mettiamo un coefficiente davanti al suo argomento, ovvero scriviamo  $\sin 2x$ . Provate a disegnare tale funzione e cerchiamo di fare successivamente con l'aiuto anche di Federico congetture circa la relazione che può sussistere tra tale coefficiente ed il periodo.”**

Alcuni ragazzi dopo aver correttamente disegnato il grafico hanno detto: **“aumenta la frequenza e diminuisce l'ampiezza”** (Domingo qui ha chiesto di precisare meglio), altri hanno: **“errato diminuisce la frequenza e aumenta l'ampiezza,”** altri ancora: **“per me c'è una traslazione”**. Paola in questa fase sta aspettando che i ragazzi le suggeriscano i valori che assume la funzione nei consueti punti e Domingo ha quindi chiesto ai ragazzi in base al valore assunto dalla funzione in questi punti, quale congettura rappresenta meglio il grafico.

Un ragazzo ha chiesto a Paola: **“può disegnare meglio l'asse dei radianti perché intervengono nuovi valori e per cercare di dare un minimo di simmetria all'asse.”** Paola ha quindi proposto di suddividere l'asse in pigreco quarti, per dare più precisione al grafico. Domingo ha suggerito ai ragazzi di tracciare il grafico sul loro quaderno in modo tale da aiutare Paola nella fase di completamento alla lavagna; Paola in tale circostanza ha compiuto un errore di distrazione facendo assumere alla funzione un valore errato in un punto. I ragazzi attenti l'hanno corretta prontamente dicendo: **“guardi che forse c'è un errore... in quel punto la funzione assume valore diverso..”** Passa qualche minuto... c'è stato un minimo di parlottamento... Si è disegnato finalmente questa curva che risulta visivamente più stretta dell'originale e di conseguenza i ragazzi hanno tratto le dovute conclusioni; Domingo ha chiesto ai ragazzi di intervenire se c'è qualche punto oscuro.

Suona la campanella... si è precisato meglio il grafico della funzione che i ragazzi hanno graficato con l'aiuto delle calcolatrici. Paola ha tirato le fila del discorso: **“bene ragazzi a questo punto tiriamo un pochino le fila del discorso e cerchiamo di evidenziare come tale coefficiente abbia influenzato la frequenza ovvero come il periodo si sia dimezzato rispetto al caso iniziale. Notate le differenze rispetto al caso precedente? Bene. A questo coefficiente in fisica si dà il nome di pulsazione ed è legato al periodo dalla seguente formula:  $T = 2\pi \text{pigreco} / \text{pulsazione}$ . La frequenza è l'inverso del periodo e rappresenta il numero di oscillazione che tale funzione effettua in un periodo.”**

**“Vediamo adesso di vedere meglio il discorso della costante di fase: provate a graficare  $\sin(x + \text{pigreco}/4)$  e provate a fare congetture sul ruolo di tale costante. Aspetto suggerimenti...”**

I ragazzi aiutandosi con le calcolatrici graficano velocemente le funzioni e ci “aiutano” nella ricostruzione alla lavagna; il concetto appare quindi chiaro per cui non ci si soffermiamo ancora molto. A questo punto Federico effettua qualche riflessione fisica sull'argomento: **“mi piacerebbe sottolineare con voi quanto sia importante il ruolo della costante della molla nel determinare il periodo dell'oscillatore... esiste una relazione che può essere dedotta sperimentalmente per valutare in che modo la massa e k possano intervenire nella determinazione della formula del periodo; sperimentalmente si deduce che k e m sono legate tra loro da un quoziente e da una radice quadrata e inoltre esiste una costante determinabile anch'essa sperimentalmente che stabilisce la proporzionalità tra tale quoziente e il periodo; possiamo così schematizzare il discorso:  $T = \text{cost} \sqrt{K/m}$ .”**

La lezione termina con la scrittura alla lavagna di codesta espressione.

#### SCHEDA 6

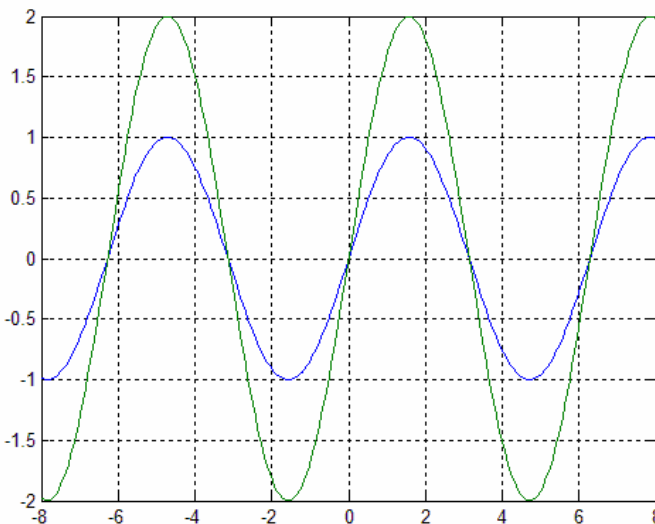
Data la natura multimediale dell'attività proposta è allegato un floppy<sup>17</sup>.

<sup>17</sup> Si consiglia di avere le plug-in per Java e Flash aggiornate in Explorer.

QUESTIONARIO DI VALUTAZIONE

1. Cosa significa dire che le funzioni seno e coseno sono periodiche di  $2\pi$  ?

2. Dato il grafico in figura determina approssimativamente periodo e ampiezza delle due funzioni rappresentate



3. Il valore di  $\sin x$  :

- a. È un numero puro
- b. Ha le dimensioni di una lunghezza
- c. Ha dimensioni che dipendono da quelle di  $x$

4. Indica tra le seguenti equazioni quelle che sicuramente non ammettono soluzioni in campo reale

- a.  $\cos x = 2$
- b.  $2\cos x = 2$
- c.  $\cos 2x = 1$
- d.  $\cos x + \sin x = 10$

5. Considera il caso dell'oscillatore armonico visto in classe: traccia uno schizzo della traiettoria seguita dalla massa e della sua legge oraria  $x(t)$ .

6. Indica quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- a. il periodo di un oscillatore armonico aumenta se aumento il valore della massa appesa
- b. il periodo di un oscillatore armonico diminuisce se aumento il valore della massa appesa
- c. il periodo di un oscillatore armonico aumenta se aumento il valore della costante  $k$  della molla
- d. il periodo di un oscillatore armonico diminuisce se aumento il valore della costante elastica  $k$  della molla

7. Data la seguente tabella relativa alla legge oraria di un corpo, riporta i punti in un sistema di assi cartesiani e prova a dare una descrizione della traiettoria seguita dal corpo.

t	x	y
1	0	1
2	1	3
3	2	5
4	3	6

8. Facendo riferimento ai dati della tabella precedente, si può secondo te dire qualcosa intorno alla velocità ed all'accelerazione del corpo?

Analisi e commenti al questionario finale**Risposte alla domanda n°1**

Il concetto è chiaro anche se permangono problemi nell'uso del linguaggio:

“significa che ripetono lo stesso andamento ogni volta che l'angolo OC è  $2p$  o un suo multiplo”

“che intersecano le x nei multipli e di  $2p$ ”

“significa che la frequenza e gli intervalli sono uguali, l'unica variabile è il tempo”

“il seno rappresenta le ordinate, il coseno, se prendiamo come riferimento un cerchio con raggio diverso da uno è il rapporto tra ascissa e raggio. Le funzioni seno e coseno sono periodiche di  $2p$ , significa che gli intervalli di tempo varranno  $2p$ , sia nelle y che nelle x, perciò ogni funzione formerà un cerchio”

“sono periodiche di  $2p$  perché qualsiasi valore venga accostato a seno o coseno descriveranno sempre una circonferenza  $2p$ ”

“uno dei parametri delle funzioni seno e coseno è k” che rappresenta il numero di giri sulla circonferenza. Un giro intero è  $2p$  radianti, le funzioni, dunque, si ripetono solo una volta raggiunto il  $2p$ , ad ogni giro, ad ogni k

Alcuni hanno invece dato la seguente risposta:

“sono periodiche poiché si ripetono esattamente ogni  $2p$ ”

**Risposte alla domanda n° 2**

Ho chiamato A la funzione più ampia e B quella meno ampia

<b>Ampiezza f(x) A</b>	<b>Ampiezza f(x) B</b>	<b>Periodo f(x) A</b>	<b>Periodo f(x) B</b>	<b>N° alunni</b>
0,75	0,75	2	1	1
<u>4</u>	<u>2</u>	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>5</u>
<u>2</u>	<u>1</u>	<u>2p</u>	<u>2p</u>	<u>5</u>
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>1</u>
<u>6</u>	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>1</u>
<u>2</u>	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>1</u>
<u>2</u>	<u>1</u>	<u>1,5</u>	<u>1,5</u>	<u>1</u>
<u>1</u>	<u>1</u>	<u>2,5</u>	<u>2,5</u>	<u>1</u>
<b>Risposte corrette ma espresse con frasi del tipo “uguale periodo ma ampiezza doppia..”</b>				<b>5</b>

**Risposte alla domanda n° 3**

<b>Valore di <math>\text{sen}x</math></b>	<b>N° risposte</b>
• <b>Numero puro</b>	<b>11</b>
• <b>Dimensioni di una lunghezza</b>	<b>1</b>
• <b>Dimensioni che dipendono da x</b>	<b>11</b>
• <b>Nessuna risposta</b>	<b>1</b>

Questa tabella evidenzia quindi che la metà della classe ha risposto che  $\text{sen}x$  è sia un numero puro che una grandezza che dipende da x; casi sporadici invece hanno associato al seno il significato di misura di una lunghezza o di funzione che dipende esclusivamente da x.

**Risposte alla domanda n°4**

<b>Tipologia di equazione</b>	<b>N° risposte</b>
• <b><math>\text{Cos}x = 2</math></b>	<b>10</b>

• <b><u><math>2\cos x = 2</math></u></b>	<b><u>3</u></b>
• <b><u><math>\cos 2x = 1</math></u></b>	<b><u>6</u></b>
• <b><u><math>\cos x + \sin x = 10</math></u></b>	<b><u>17</u></b>

Qui si evince come i ragazzi abbiamo chiaro il codominio delle funzioni, anche se alcuni si sono fatti trarre in inganno dalla equazione  $\cos 2x = 1$ .

### **Risposte alla domanda n° 5**

Quasi tutti hanno riprodotto (con inesattezze di notazione però) la legge oraria della massa con e senza attrito (anche se non tutti la chiamano legge oraria; spesso si tratta di schizzi senza alcuna spiegazione; della traiettoria non si parla quasi mai; solo alcuni casi la descrivono come “linea costruita dai punti percorsi nello spazio dal corpo”; un unico caso è completamente sbagliato, tracciando le due sinusoidi (ideale e smorzata) ed indicandole come traiettoria; un ragazzo disegna la legge oraria e riporta sul grafico informazioni circa il moto della massa (curva crescente quindi accelerazione diversa da zero, curva decrescente, decelerazione ecc..). Un paio di ragazzi hanno riprodotto il disegno che Federico aveva a suo tempo fatto, schematizzando alla lavagna l'evoluzione spaziale della massa appesa alla molla nel tempo.

### **Risposte alla domanda n° 6**

<b><u>Tipologia di affermazioni</u></b>	<b><u>N° risposte</u></b>
• <b><u>Il periodo aumenta se aumento il valore della massa</u></b>	<b>13</b>
• <b><u>Il periodo diminuisce se aumento il valore della massa</u></b>	<b>8</b>
• <b><u>Il periodo aumenta se aumento il valore della costante k</u></b>	<b>6</b>
• <b><u>Il periodo diminuisce se aumento il valore della costante k</u></b>	<b>14</b>

La maggioranza ha risposto correttamente centrando le due risposte corrette; permangono cmq alcuni problemi forse sulle relazioni di proporzionalità diretta e inversa, almeno per un paio di persone. Rimane il dubbio se chi ha risposto correttamente lo abbia fatto in seguito ad un ragionamento logico oppure applicando pedestremente senza porsi domande fisiche, la relazione che lega il periodo alla costante e alla massa.

**Questionario finale** *Correzione e valutazione*Griglia di valutazione

<i>Domanda</i> <sup>18</sup>	<b>Saper leggere</b>	<b>Saper descrivere procedure</b>	<b>Saper eseguire procedure</b>	<b>Capire concetti</b>	<b>Costruzione ragionamento</b>	<b>Consapevolezza (eccellenza)</b>
#2 (1.875)	x	x	x	x	-	-
#3 (1.875)	x	x	x	x	-	-
#4 (2.625)	x	x	x	x	x	-
#6 (2.625)	x	x	x	x	x	-
<i>Pti. per competenza</i>	0.75	0.25	0.625	0.25	0.75	-
	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2.5</b>	<b>1</b>	<b>1.5</b>	<b>1</b>

Valutazione riportata dai singoli studenti<sup>19</sup>

<i>studente</i>	<b>Domanda #2</b>	<b>Domanda #3</b>	<b>Domanda #4</b>	<b>Domanda #6</b>	<b>totale</b>	<b>arrotondamenti</b>
1	CC	CE	EC	CC	6.75	7 (+) <sup>20</sup>
2	CE	E	CE	EE	2.25	2
3	CC	E	EC	CC	5.8125	6 (+)
4	EE	E	CC	CA	3.9375	4
5	CE	E	CC	CC	6.1875	6
6	EC	E	CC	CC	7.125	7
7	EC	C	CC	CC	8.0625	8
8	CC	CE	CC	CC	8.0625	8 (+)
9	EE	E	CC	EE	2.625	3
10	CC	C	CA	CC	7.6875	8 (+)
11	CC	C	CA	EC	6.375	6
12	EE	CE	CA	E	2.25	2
13	CA	E	EC	CC	4.875	5
14	CC	E	EC	CC	5.4275	5
15	EE	C	CC	EC	5.8125	6
16	CE	C	CC	EE	5.4375	5
17	CE	E	CC	CC	6.1875	6
18	CC	C	CE	EE	5.0625	5 (+)
19	AA	CE	CC	CC	6.1875	6 (+)
20	AA	C	EE	C	4.5	5
21	EE	C	CA	CC	5.8125	6

Riepilogo situazione della classe:

totale alunni: 21

gravemente insufficienti (&lt;5 punti): 4

insufficienti (punti tra il 5 ed il 6): 5

<sup>18</sup> *Fra parentesi, in italico, i punti assegnati ad ogni singola domanda*<sup>19</sup> *legenda: C indica risposta corretta; E risposta errata; A: non ha risposto*<sup>20</sup> *+: indica che lo studente ha indicato anche correttamente il tipo di funzione graficata nella domanda #2: senx e 2senx*

sufficienti (>6): 12

## QUESTIONARIO

1. Hai trovato difficoltà nella comprensione del concetto di periodo?
  
2. Quali difficoltà hai incontrato nel lavoro di gruppo basato sulle schede?
  
3. Ritieni che l'impiego di linguaggi e strumenti diversi (simulazioni al computer, osservazioni sperimentali, lettura del libro di testo ecc.) aiuti la comprensione o crei confusione?
  
4. In base agli strumenti usati, quali ritieni per te più congeniale?
  
5. Per la comprensione degli argomenti trattati il lavoro dei tirocinanti è stato:
  - a. Utile
  - b. Abbastanza utile
  - c. Ininfluyente
  - d. Dispersivo
  - e. Di disturbo
  
6. Nel corso della normale attività in classe la presenza dei tirocinanti è stato:
  - a. Di disturbo
  - b. Ininfluyente
  - c. Di aiuto per la classe
  - d. Di aiuto per l'insegnante
  
7. Le discussioni con i tirocinanti in classe sono state:
  - a. Comprensibili
  - b. Abbastanza comprensibili
  - c. Poco comprensibili
  
8. Commenta liberamente questa esperienza

Analisi Questionario di gradimento

### **9. Quali difficoltà hai trovato nell'introduzione del concetto di periodo a partire dall'osservazione del moto di un oscillatore?**

70% in un primo momento ho trovato difficoltà

25% non ho avuto nessuna difficoltà

5% non ho tuttora le idee chiare

**10. Quali difficoltà hai incontrato nel lavoro di gruppo basato sulle schede?**

30% qualche difficoltà sia nel lavoro di gruppo sia nella soluzione degli esercizi proposti

70% nessuna difficoltà

**11. Ritieni che l'impiego di linguaggi diversi (simulazioni al computer, osservazioni sperimentali, lettura del libro di testo ecc.) aiuti la comprensione o crei confusione? In particolare, quale approccio è stato per te più naturale ed intuitivo?**

50% simulazioni, osservazioni sperimentali sono di grande aiuto

20% lettura del libro di testo e lezioni frontali aiutano nella comprensione, mentre simulazioni ed osservazioni sperimentali creano confusione

30% lezioni frontali e simulazioni con esperimenti per avere un quadro completo del fenomeno investigato

**12. Per la comprensione degli argomenti trattati il contributo dei tirocinanti è stato:**

- a. Utile **70%**
- b. Abbastanza utile **20%**
- c. Ininfluyente **5%**
- d. Dispersivo **0%**
- e. Di disturbo **5%**

**13. Nel corso della normale attività in classe la presenza dei tirocinanti è stato:**

- a. Di disturbo **5%**
- b. Ininfluyente **5%**
- c. Di aiuto per la classe **60%**
- d. Di aiuto per l'insegnante **30%**

**14. Le spiegazioni date dai tirocinanti in classe sono state:**

- a. Comprensibili **77%**
- b. Abbastanza comprensibili **20%**
- c. Poco comprensibili **3%**

**15. Commenta liberamente questa esperienza**

60% utile per avere pluralità di spiegazioni

30% positiva interessante

5% ininfluyente e ripetitiva

5% istruttiva anche se a volte complessa e di difficile interpretazione

**Diario di tirocinio****Orario delle Lezioni<sup>21</sup>**

	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato
8.15 - 9.05	I D	IV D	I D	II D		I D
9.05 - 9.55		IV D	III D (PNI)	II D		IV D
9.55 - 10.45	II D	IIID (PNI)	II D			II D
11.00 - 11.50	III D					
11.50 - 12.40	III D	I D	III D			
12.40 - 13.30		I D				

**13/10/2003 #2**

11:00-12:40: svolgimento di esercizi di riepilogo sul programma dell'anno passato, con particolare riguardo per la risoluzione di equazioni ed il grafico di funzioni. Assistiamo alla lezione e partecipiamo allo svolgimento di gruppo degli esercizi proposti, fornendo chiarimenti agli studenti e cogliendo l'occasione dei momenti di completa indipendenza nel lavoro della classe per discutere con l'IDC di alcuni punti del progetto di tirocinio. È inoltre molto importante questa fase perché ci permette di diventare familiari e fare conoscenza dei nuovi ragazzi che si sono aggregati provenendo dal piano di studi tradizionale e che condivideranno col resto della classe il progetto di tirocinio.

**14/10/2003 #1**

9:55-10:45: risoluzione e discussione di esempi di applicazioni di calcolo combinatorio. Vengono assegnati in classe alcuni ulteriori esercizi: collaboro con l'insegnante nel fornire suggerimenti, spunti, correzioni ai singoli che ne fanno richiesta. In particolar modo su suggerimento dell'ISV mi faccio indicare da L'IDC, i ragazzi che per impegno, dote spiccano per intuizione matematica. Gli altri si dimostrano vivaci nel far domande spesso critiche e pertinenti all'insegnante. Durante le spiegazioni sia i ragazzi più bravi sia quelli un po' meno ascoltano attentamente: la differenza consiste oltre che nel diverso profitto, nella partecipazione alla lezione che è quasi sempre dialogata: alcuni sono assenti, ma complessivamente la classe risulta estremamente attiva.

**15/10/2003 #1**

9:05-9:55 (solo PNI): vengono assegnati esercizi di riepilogo sui temi del calcolo combinatorio. Inoltre si parla di probabilità: discussione aperta su varie opinioni. L'IDC definisce sia l'approccio frequentista che quello soggettivista (si parla di soggetto coerente). Lettura dal testo. La lezione è abbastanza animata e i ragazzi partecipano con osservazioni alcune pertinenti altre meno. Collaboro con l'insegnante nel fornire suggerimenti, spunti, correzioni ai singoli che ne fanno richiesta. Abbiamo sempre continuato ad analizzare il comportamento del gruppo migliore e di quello peggiore, ma sostanzialmente la situazione è assai statica, almeno nelle ore di matematica: ci sono quei tre o quattro elementi che partecipano, mentre gli altri ascoltano più o meno interessati alla lezione.

**15/10/2003 #1**

11:50-12:40: La classe è al completo: partecipo alla correzione della verifica, rispondendo a domande e chiarimenti dei singoli. Definisco con l'IDC gli ultimi dettagli in merito al questionario da consegnare la volta successiva.

**20/10/2003 #2**

11:00-12:40: nel corso della prima ora partecipo alla conclusione della correzione della verifica in classe. Nel tempo residuo della prima ora introduco alla classe il progetto del tirocinio, esplicito alcuni dei passaggi essenziali che verranno svolti, introduco il questionario, spiegandone il senso e le finalità. La seconda ora è interamente dedicata allo svolgimento del questionario con occasionali interventi di chiarimento o precisazione richiesti dagli studenti in merito alle richieste delle varie domande o a modalità di chiarimento. Gli alunni della liceo tradizionale segnalano di aver passato l'anno passato una analoga esperienza e non sembrano molto entusiasti della cosa.

**22/10/2003 #1**

9.05-9.55 L'IDC riprende la questione sul triangolo di Pascal per spiegare ai ragazzi il significato dei coefficienti binomiali. Rappresenta il calcolo combinatorio sfruttando il diagramma ad albero; trovo questo un approccio interessante e proficuo. I ragazzi chiedono esempi esplicativi e L'IDC si rende conto che l'argomento è tutt'altro

<sup>21</sup> In grigio sono indicate le ore nelle quali l'IDC ha dato disponibilità ad ospitarci secondo i modi ed i tempi accordati di volta in volta, nel rispetto della scansione didattica programmata all'inizio dell'anno

che banale da spiegare; si discute a lungo sul grado complessivo di un monomio e sul fatto che lo sviluppo di  $(a + b)^n$  è composto da una serie di termini che hanno ciascun grado  $n$ . Ad un certo punto la lezione si interrompe poiché un ragazzo da un pugno nella schiena ad un suo compagno; ciò fa irritare Paola al punto tale da mettere una nota di demerito ad entrambe. Successivamente all'episodio, Paola decide di fare esercizi applicativi dicendo ai ragazzi di studiare da soli lo sviluppo, visto il loro atteggiamento.

**27/10/03 #2**

11:00-12:40: In queste due ore vengono proposte alcuni punti della scheda di lavoro 1: i ragazzi vengono accoppiati a gruppi di tre/quattro persone e invitati a fare considerazioni scritte sulle forze che agiscono su di una massa appesa ad una molla, sistema ricostruito da L'IDC e Federico in classe, per agevolarli. Noi e L'IDC giriamo tra i banchi per fornire chiarimenti sul tema proposto. Alcuni ragazzi chiedono di poter usufruire del modello per chiarirsi alcuni dubbi in merito alla questione delle forze; altri invece molto più teorici fanno considerazioni per niente banali sulla fenomenologia che sta dietro al modello. Alla fine delle due ore abbiamo raccolto i fogli sui quali i ragazzi hanno scritto i loro "pensieri" in merito (abbiamo notato da una rapida occhiata che tutti i gruppetti hanno schematizzato il sistema mediante schizzo sul foglio, come aiuto nello studio da effettuare), i quali saranno successivamente analizzati da noi e L'IDC in un resoconto.

**29/10/03 #1**

11:50-12:40 Vengono consegnate ai ragazzi le consegne relative ai punti 3 e 4 della scheda 1 da svolgere a gruppi, non mutati rispetto alla volta precedente. In classe è presente, come in tutta questa fase del percorso, il sistema fisico oggetto di studio ed alcune molle e pesi presi a prestito dal laboratorio di fisica. La procedura di lavoro è identica a quella della lezione precedente, essendo questa prima fase necessaria alla costruzione di una conoscenza del fenomeno nelle sue parti che permetta sia di amalgamare, attraverso l'elaborazione di gruppo, le componenti della classe che hanno diverse esperienze curricolari, sia di "guidare", attraverso i vari punti della scheda e la loro scansione temporale, verso una esplicitazione non formale delle osservazioni compiute. Questa fase esplorativa verrà poi rielaborata attraverso una lezione dialogata con la classe che servirà sia da sistemazione di quelle questioni disciplinari la cui competenza è risultata carente in qualche gruppo, sia da riflessione sull'uso del linguaggio matematico nella traduzione delle fenomenologie naturali. Il costante riguardo che in questa elaborazione di progetto viene riservato alla componente linguistica è lungi dall'essere occasionale, ma prende spunto dai risultati emersi dal questionario e dalla discussione che ne è seguita e si innesta in un progetto multidisciplinare nel quale la IIID è coinvolta (come da contratto) ed inerente la riflessione sulle diverse forme linguistiche (iconica, linguistica e musicale) nella rappresentazione del mondo. Nel corso delle libere elaborazioni di gruppo, il nostro apporto consiste nella partecipazione alle discussioni, ove richiesto, senza la proposizione di soluzioni o di un sapere pre-constituito, operando piuttosto sulle idee espresse dagli studenti per suggerire loro punti di riflessione o confutazione. In ogni caso, il tentativo è quello di non riservare ad una fase successiva la sistemazione del sapere, cosa che, in questa fase di crescita ed elaborazione della conoscenza, potrebbe risultare ben più deleteria.

**03/11/03 #2**

11:00-12:40: prosegue l'attività iniziata la lezione scorsa. Nella prima ora, con identiche modalità. Nel corso della seconda ora viene assegnata l'ultima ulteriore consegna, da completarsi eventualmente a casa e consegnare in occasione dell'incontro successivo. Alcuni gruppi terminano in anticipo l'elaborazione ed iniziano a discutere sulla procedura migliore per la raccolta dei dati relativi all'allungamento della molla a seconda delle sollecitazioni

**05/11/03 #1**

11:50-12:40: conclusione delle attività relative alla scheda 1, raccolta degli elaborati ed esposizione alla classe del percorso che verrà seguito nelle lezioni future. Si risponde alla richiesta da parte di alcuni studenti di utilizzo del laboratorio di informatica per l'elaborazione dei dati: si ha così modo di anticipare con maggior dettaglio il tipo di analisi che verrà condotta attraverso l'impiego del foglio di calcolo Excel e, in particolare, si inizia ad introdurre il rapporto matematica-fisica che sta alla base dei modelli del mondo fisico e che sarà tema portante di alcuni incontri.

**10/11/03 #2**

11:00-12:40: la prima parte della lezione si basa sull'esplicitazione delle osservazioni emerse dall'analisi sistematica di tutti gli elaborati raccolti (ed ivi riportate). La classe è invitata a partecipare alla discussione ed alla sistemazione disciplinare delle questioni emerse attraverso la lettura – in forma anonima- delle conclusioni riportate in alcuni elaborati, ritenute significative di errori tipici o concezioni fasulle frutto di una non corretta amalgama della disciplina con le evidenze dell'esperienza di ogni giorno (emblematico il caso della forza esercitata dalla massa del corpo in aggiunta a quella gravitazionale). Questa prima fase, nella quale non di rado sono direttamente alcuni studenti, più coinvolti nel progetto, a proporre il loro punto di vista risolutivo a tutta la classe, si conclude con la discussione di due elaborati che si sono distinti da altri per la loro concisione e precisione e che, pur con qualche necessaria correzione linguistica, presentano due diversi approcci possibili alla descrizione del fenomeno: uno

dinamico (prevalentemente legata alla legge di Newton) ed uno più improntato su una idea "implicita" di conservazione-dissipazione dell'energia "immagazzinata" nel sistema. La lezione prosegue con l'introduzione del problema della veste matematica da dare alle osservazioni sperimentali fatte e con una breve discussione di come la matematica si ponga quale possibile linguaggio descrittivo di certi fenomeni osservati. In particolare, va segnalato che una breve dispensa di 3 pagine è stata consegnata (stampata o spedita via email) a ciascuno studente onde sollevarlo dall'onere di prendere appunti e permettergli una più fattiva partecipazione alla lezione. Questi aspetti meno formali e più filosofici del problema catturano l'attenzione e la risposta della classe risulta in una partecipazione attenta alla lezione, con interventi, considerazioni a margine liberamente proposte dagli alunni più vivaci e coinvolti. Alcune dispense risultano sottolineate o annotate a margine, segno che qualcuno ha già dato una prima lettura alle questioni trattate. La parte più formale e "frontale" della lezione è rimandata all'incontro successivo.

#### **12/11/03 #1**

11:50-12:40: La lezione è incentrata sulla deduzione formale della legge di Hooke a partire dalle evidenze sperimentale raccolte e sistemate nel lavoro delle lezioni precedenti. A dispetto del carattere apparentemente frontale, la lezione consta di lunghe riflessioni collettive, discussioni riguardanti temi richiesti dagli studenti e legati alla materia esposta (in particolare gli errori nella pratica sperimentale). Ampio spazio è dato alle proposte di risoluzione di alcuni, attraverso la validazione o confutazione collettiva delle ipotesi proposte. Particolare interesse sembra suscitare nei più il costante oscillare delle questione tra matematica e fisica e, soprattutto, il riferimento costante a quanto scritto dagli studenti nei loro elaborati. La possibilità di utilizzare materiale direttamente prodotto in classe permette, in questo senso, di rendere tutti partecipi della fase di costruzione della conoscenza e contribuisce a rendere meno avulse le tematiche affrontate dall'esperienza quotidiana. Al termine della lezione si anticipano, più nel dettaglio, le attività successive, di carattere prevalentemente matematico-informatico.

#### **17/11/03 #2**

11:00-12:40: l'IDC ha prenotato il laboratorio di informatica per l'utilizzo dei calcolatori e la formattazione del foglio excel ai fini della simulazione. La prima mezzora viene dedicata alla discussione di quella che sarà la consegna affidata ai soliti gruppi di lavoro. Vengono per questo illustrati i vari punti presenti nella scheda di lavoro proposta e richiamati, recuperati i fatti salienti emersi dal lavoro delle settimane di gruppo e che rifluiscono naturalmente in questa lezione che salda la prima parte fisica del progetto a quella più prettamente matematica. In particolare, dopo l'esposizione (contestualizzata nell'ambito della dinamica dei corpi) dei principi che stanno alla base del metodo risolutivo dell'equazione attraverso iterazioni successive, si propone alla classe di partecipare alla costruzione del diagramma di flusso della procedura da seguire e se ne discute successivamente una possibile definizione per ricorrenza presentata direttamente sulla scheda di lavoro. Il tempo restante (un'ora e mezza circa) viene trascorso in laboratorio, seguendo il lavoro svolto dai gruppi singolarmente, intervenendo ed annotando difficoltà o proposte alternative occasionalmente emerse. Gli ultimi 20-25 minuti servono a raccogliere i risultati da quanto è stato prodotto e discutere collegialmente in via preliminare le osservazioni fatte dai gruppi di lavoro, preparando così i temi per l'incontro successivo. Complessivamente, tutti sono riusciti a raggiungere la completa attuazione della consegna: formattazione di un foglio di excel in grado di risolvere le equazioni del moto del sistema. Alcuni gruppi dimostrano però la necessità di una ulteriore riflessione a casa sulle potenzialità del metodo e sui suoi stretti legami con quanto svolto sino ad ora. Sarà su questi (ed altri) punti che lavoreremo nelle prossime ore, attraverso una scheda di lavoro per punti

#### **19/11/03 #1**

11:50-12:40: viene proposto agli studenti un lavoro di laboratorio d'informatica nel quale è richiesto l'utilizzo guidato del foglio di calcolo formattato e l'annotazione di osservazioni mirate alla raccolta di elementi che saldino da un lato la simulazione alle osservazioni sperimentali sin qui raccolte, dall'altro che servano da temi guida per le riflessioni delle lezioni successive. La lezione si svolge col massimo impegno di tutti e, singolarmente, all'interno di certi gruppi è già possibile anticipare alcune riflessioni oggetto di approfondimenti successivi.

#### **24/11/03 #2**

11:00-12:40: Questa lezione è stata preparata raccogliendo tutte le osservazioni raccolte durante le ore trascorse nel laboratorio di informatica. La prima parte (20 minuti circa) sono dedicati al recupero di alcune questioni disciplinari prevalentemente legate a dubbi espressi da alcuni studenti, legate soprattutto al concetto di accelerazione e velocità. Il resto della lezione si fonda sulla proposizione e discussione collegiale delle osservazioni (giuste, parzialmente corrette o errate) raccolte o riproposte dai gruppi di lavoro. Particolare attenzione è prestata al riconoscimento, negli andamenti graficati in laboratorio, di quelle caratteristiche di periodicità delle funzioni già qualitativamente previste dalle annotazioni sperimentali condotte in precedenza. Anche la dipendenza dalla massa, altrove intuita da alcuni gruppi, viene discussa mettendo a confronto grafici ottenuti variando i parametri della simulazione.

Le tematiche più specifiche sono rinviate alle ore successive, visto il carattere di delicatezza ed importanza che ricoprono.

**26/11/03 #1**

11:50-12:40: Un parte non secondaria della riflessione si incentra poi sugli aspetti matematici del metodo vero e proprio, in particolare sul significato di “intervallo piccolo” entro il quale considerare il moto come uniformemente accelerato e sulla dipendenza di questo dall'affidabilità della soluzione. L'utilizzo di intervalli di tempo “grandi”, ad esempio superiori al periodo, indica una progressiva divergenza delle oscillazioni, laddove, nella realtà si osserverebbe uno smorzamento. Questo porta a riflessioni sia sul carattere del modello (nel quale l'attrito non è stato incluso e quindi non sarebbe lecito aspettarsi uno smorzamento), sia sulle possibili motivazioni che inducono quelle oscillazioni divergenti. Si accenna al significato matematico del metodo utilizzato (approssimazione locale di una funzione con un polinomio di secondo grado) e si individua una motivazione di questo comportamento nel progressivo discostarsi del polinomio dalla funzione che vuole descrivere, su intervalli di tempo via via crescenti. Si discute anche su come, anche con “intervalli piccoli”, tale fenomeno si possa manifestare per intervalli di simulazione prolungati: questo porta a riflettere naturalmente sul carattere locale dell'approssimazione e sulla dipendenza dai parametri iniziali scelti in relazione al problema che si vuole descrivere.

**01/12/03 #2**

11:00-12:40: Prima di procedere con la trattazione matematica del problema delle funzioni periodiche, ormai completamente contestualizzato col lavoro di questi mesi in ambito fisico, si ritiene opportuna una lezione nel laboratorio di fisica, con l'impiego di sensori di posizione per avviare una riflessione sia sul ruolo degli strumenti impiegati come mediatori di conoscenza, sia per rinsaldare attraverso l'esperienza degli studenti, un atto di moto di un sistema con la sua rappresentazione in forma di legge oraria o traiettoria. Gli studenti sono suddivisi in gruppi, ciascuno dotato di un coordinatore. A turno, ciascun coordinatore deve muoversi rispetto al sensore, osservando la traccia del proprio movimento proiettata su un muro dell'aula grazie al view screen posto sulla lavagna luminosa e collegato alla calcolatrice. Tutti gli studenti devono osservare attentamente, dal proprio banco, il movimento dei coordinatori e la traccia descritta sul muro dell'aula. Al termine del movimento dei 5 coordinatori, i gruppi si riuniscono per riflettere e discutere su quanto fatto o visto fare. L'attività successiva consiste invece nel muoversi rispetto al sensore che, però, non è in funzione. Tutti gli altri studenti devono cercare di disegnare, sul proprio foglio, un grafico “spazio – tempo” simile a quello che si sarebbe prodotto sul muro se il sensore fosse stato in funzione. Subito dopo, lo stesso movimento prima eseguito senza sensore in collegato deve essere ripetuto con il sensore in funzione. Tutti gli studenti devono confrontare la traccia proiettata sul muro con il grafico posizione – tempo disegnato prima sul foglio. Molti gruppi individuano correttamente gli andamenti e chiediamo quindi a questi gruppi di confrontarsi con quelli che hanno compiuto errori al fine di giungere ad una posizione comune. Il nostro ruolo è quello di moderatori. Al termine di una ventina di minuti di dibattito, gli ultimi della lezione, le posizioni sembrano essersi conciliate su un'unica linea. Il lavoro verrà ripreso e completato con una discussione al caso dell'oscillatore nel corso della lezione successiva.

**03/12/03 #1**

11:50-12:40: Ripresa e completata la riflessione sul problema delle traiettorie affrontato in coda alla lezione precedente, chiediamo agli studenti di esplicitare quanto appreso rispondendo alle seguenti domande: quando si ha un segmento orizzontale? Quando si ha un segmento obliquo che sale e quando un segmento obliquo che scende? Quando si ha una curva che sale? E quando si ha una curva che scende? Quando si ha una curva a  $\cup$ ? E quando invece si ha una curva a  $\cap$ ? Nella discussione (che si svolge nell'ultima mezzora di lezione) il nostro ruolo è quello di moderatori tra le varie posizioni assunte dai gruppi. Al termine di essa... si discute su come sia possibile, attraverso il sensore, riprodurre sul display un andamento periodico tipo quello osservato con la molla e determinato attraverso la simulazione al calcolatore. Con questa esperienza e la discussione che ne segue riteniamo, dalle osservazioni emerse, di aver fornito uno spunto efficace per fissare la distinzione tra legge oraria e traiettoria.

**10/12/03 #1**

11.50-12.40: dopo la pausa festiva, riteniamo necessario riprendere insieme alla classe punto per punto le attività svolte, annotando alla lavagna (nel corso della discussione con gli studenti) i punti principali da tenere presenti nel prosieguo dell'attività: è questo un momento nel quale le competenze disciplinari (legate ai parametri del moto dell'oscillatore) vengono saldate con il tessuto d'esperienza comune legato alle attività di osservazione sperimentale o di pratica con i sensori di moto. Le attività della scheda 4, legate alla formalizzazione matematica, sono qui introdotte da un punto di vista dell'analisi del linguaggio, recuperando lo sfondo epistemologico che ovunque ed occasionalmente, è stato curato come ulteriore collante di questa esperienza didattica. La classe risponde con partecipazione e

l'impressione che emerge dalla qualità dei singoli interventi è quella di una minore ansia di aggrapparsi ad un sapere di riferimento, preferendo una più accurata descrizione delle intuizioni o delle convinzioni maturate. Viene lasciato il compito ai ragazzi di riordinare il materiale di questa lezione in vista della ripresa delle attività dopo la pausa natalizia.

#### **12/01/04 #2**

10.50-12.40: Si iniziano le attività legate alla Scheda 4. I ragazzi (a gruppi) vengono sono invitati a lavorare intorno al concetto di radiante e, a seguire, sulla costruzione delle funzioni trigonometriche elementari. Tale attività verrà svolta attraverso l'indagine del moto di un punto su una circonferenza di raggio unitario e l'esplicitazione per punti delle caratteristiche essenziali di tale moto. In particolare, si cercherà di giungere alla raccolta di evidenze e congetture che siano direttamente confrontabili col caso unidimensionale rappresentato dall'oscillatore armonico. Ciò permetterà di saldare contesti esperienziali diversi attraverso la costruzione e l'esplorazione di situazioni periodiche legate inizialmente ad un fenomeno fisico ben definito, quindi alla sua simulazione al calcolatore ed infine ad una procedura formale di costruzione delle funzioni trigonometriche.

Questa attività, piuttosto elaborata, viene da noi brevemente introdotta e subito consegnata ai gruppi, riservandoci *in fieri* interventi occasionali più specifici per ogni gruppo a seconda della direzione presa dalla discussione. Le prime difficoltà sono al solito di carattere prevalentemente linguistico e non di rado vengono superate attraverso l'utilizzo di grafici, disegni: ciò risulta particolarmente efficace nello studio delle componenti (posizione  $x$  ed  $y$ ) di un punto  $P$  che si muove di moto circolare uniforme sulla circonferenza. In alcuni gruppi la capacità di discutere ed esplicitare i dubbi rende più agevole il superamento di questo scoglio e l'approdo a conclusioni di buona fattura: altri richiedono più tempo ed il nostro intervento attraverso la proposta di esempi o controesempi *ad hoc* per permettere di prendere posizione in merito o di rendere dialetticamente fertili divergenze di opinione. Al termine delle due ore fissate, tutti effettuano la consegna. Da un primo spoglio delle elaborati in treno vengono confermate le impressioni circa persistenti difficoltà espressive, anche a fronte di sottintesi di un certo spessore culturale. Per contro, in alcuni elaborati, redatti da studenti ormai conosciuti, presentano riflessioni profonde, concetti chiari e ben definiti.

#### **14/01/04 #1**

11.50-12.40: si dedica, come d'uso ormai, l'intera ora a disposizione all'analisi dei risultati emersi dallo spoglio delle Schede 4. Sono riportate (in forma rigorosamente anonima) posizioni di evidente errore ed altre di particolare rilievo, giungendo, attraverso la proposta di un contraddittorio comune, di recuperare l'intera classe a posizioni comuni, privilegiando proposte, idee, congetture e discussioni provenienti dall'interno del gruppo classe, agendo di preferenza come moderatori del dibattito e fornendo, solo in ultima battuta, gli strumenti linguistici per una completa formalizzazione delle questioni trattate. Vale la pena notare qui come alcuni ragazzi rivendichino la paternità di certe affermazioni (più o meno corrette... non è questo il punto) segno di una partecipazione attiva e non di una produzione casuale degli elaborati.

#### **19/01/04 #2**

10.50-12.40: queste due ore vengono svolte insieme al professore di fisica Claudio Romeni. L'idea è quella di prendere parte ad alcune ore nelle quali verrà trattato il problema dell'attrito e dei modelli fisici atti a descriverlo, onde fornire un contributo ed una ulteriore contestualizzazione di quella parte del nostro progetto che più direttamente ha sfiorato questo problema. La lezione consta di due fasi: una prima parte dialogata, nella quale si cerca di far emergere alcune evidenze legate all'attrito e proprie dell'esperienza di ogni giorno. Prendiamo parte alla discussione comune ed approfondiamo, su richiesta dei ragazzi, alcuni punti già toccati con l'osservazione delle oscillazioni smorzate. Uno studente chiede come andrebbe modificata la simulazione excel per riprodurre questi andamenti. La cosa verrà discussa nell'incontro successivo quando, col prof. Romeni, si affronteranno alcuni modelli matematici legati all'attrito. La seconda ora si svolge nel laboratorio di fisica e, insieme con la classe, si progetta e realizza un primo rudimentale esperimento che metta in evidenza gli effetti dell'attrito sul moto di un corpo. Attraverso l'impiego di sensori di posizione (gli stessi già usati per la Scheda 3) si producono andamenti di velocità nel tempo di un blocchetto di legno levigato in moto accelerato su superfici di diversa scabrezza. Ciò evidenzia ancora una volta l'attitudine degli studenti alla lettura di grafici nella produzione di congetture, e nella descrizione dei fenomeni. È questa anche la sede per riprendere una volta ancora la distinzione tra legge oraria e traiettoria.

#### **20/01/04 #1**

12:40-13:30: Nel corso di queste due ore sono inizialmente riprese dal prof. Romeni alcune delle considerazioni svolte nel corso della lezione precedente e, in particolare, viene proposta una indagine più avvicinata dei grafici... in particolare di quelli che presentano il raggiungimento di una velocità limite. Si distinguono due casi: moto su piano con attrito in presenza di una forza trainante e moto libero in assenza di una forza. Ragionando su questi primi dati raccolti e facendo riferimento sempre a situazioni di ogni giorno ("per trattenere un libro tra due dita si esercita una certa pressione, se il libro è più o meno liscio tale pressione deve essere aumentata...") si

giunge ad un primo modello di attrito "da contatto" come di forza proporzionale alla reazione vincolare esercitata dal corpo sulla superficie del vincolo. Ci viene chiesto quale sia il contatto esercitato dal corpo in libera oscillazione e come si possa quindi modellare quel tipo di interazione. Ciò permette di rispondere in questo modo alla domanda posta dallo studente nella scorsa lezione. Risulta abbastanza facile convincersi che la situazione non è quella di un contatto vero e proprio e, richiamando la situazione della formula 1 o dell'esperienza col motorino (aumentando la velocità sembra che l'aria si compatti e sfregi di più) risulta abbastanza agevole proporre che in quel caso la proporzionalità vada cercata non con una reazione vincolare ma con una velocità. La cosa sembra soddisfacente per tutti ed anzi viene evidenziato come nel caso di una formula 1 ci siano due attriti da considerare: l'aria ed il suolo, mentre per un aereo in volo conti solo l'aria. Nel caso del foglio di excel, avendo la possibilità di agire sull'equazione di Newton scritta alla lavagna, si mostra come la cosa possa essere messa a posto attraverso l'aggiunta di un termine correttivo a secondo membro che tenga conto proprio di questo attrito.

#### **26/01/04 #2**

10.50-12.40: Questo incontro è dedicato ad una lezione dialogata di formalizzazione e consolidamento degli aspetti trattati. La conduce Paola alla lavagna, con libertà di intervento da parte di Federico e dell'IDC per eventuali approfondimenti. Lo scopo è quello, a partire da funzioni ormai note quali seno e coseno, di giungere ad una generalizzazione degli andamenti di tali funzioni, di pari passo con la puntualizzazione del significato fisico dei vari parametri (ampiezza, fase, pulsazione, periodo) in relazione al moto armonico discusso nel caso dell'oscillatore. Ai ragazzi viene chiesto di "aiutare" Paola nel disegno di funzioni del tipo  $A \sin x$ ,  $B \sin x$ ,  $\sin(B+x)$  e di confrontare, produrre congetture, attraverso l'ausilio delle calcolatrici programmabili di cui dispongono. L'intervento di Federico, invece, è focalizzato (al termine di ogni tipologia di trasformazione della funzione trigonometrica) al collegamento tra modello matematico e fenomeno fisico trattato. I ragazzi intervengono ripetutamente per chiedere chiarimenti sui concetti di funzioni pari e dispari, sul concetto di differenza di fase, sulla differenza tra periodo e frequenza ecc... In particolare, la discussione della dipendenza tra pulsazione (periodo) della funzione trigonometrica atta a descrivere l'oscillazione della molla e le costanti  $k$  ed  $m$ , richiama alcuni elementi di analisi dimensionale già visti nel corso di fisica col professor Romeni. La lezione viene audio-registrata per sbobinatura successiva in vista dell'incontro pomeridiano di tirocinio indiretto dell'11/2/04

#### **2/02/04 #2**

10.50-12.40: questa lezione dialogata conclusiva sul progetto (seguiranno solo alcuni incontri di esercitazione ed i questionari di valutazione e gradimento) ha lo scopo di proporre in un diverso contesto (quello della grafica e della animazione internet) le questioni sin qui affrontate in merito a leggi orarie e traiettorie. La lezione è organizzata sotto forma di sito internet da esplorare insieme agli studenti nel laboratorio di informatica. Il sito è proiettato dalla postazione centrale su un apposito schermo. La prima parte richiede la discussione collettiva di alcune leggi orarie. La traiettoria viene svelata con un clic in un momento successivo come grafico animato prodotto da Maple. I ragazzi si mostrano interessati alle potenzialità che hanno le equazioni parametriche in relazione alle traiettorie da descrivere. Un ragazzo dice di avere già visto qualcosa del genere nell'uso di LOGO, un vecchio programma che viene usato ancora in certe scuole elementari per produrre i primi disegni a comando, dando coordinate opportune ai punti. In particolare i ragazzi riescono ad individuare come, agendo sull'ampiezza delle funzioni trigonometriche, sia possibile parametrizzare curve che invadono domini crescenti dello spazio. Le figure di Lissajous stimolano poi la curiosità e viene fatta esplicita richiesta se vi sia un modo diverso da quello del calcolatore per rappresentarle. Viene proposta l'analogia con la fisica e l'interpretazione fisica delle leggi orarie per procurarsi gli strumenti matematici a coglierne almeno alcune caratteristiche essenziali. Si discute sul significato di funzione, sul senso di percorrenza di una traiettoria. Il discorso viene poi spostato su come far muovere oggetti (figure) all'interno di programmi di grafica vettoriale come Flash o nella programmazione di applet java. Viene discusso il criterio con cui è possibile generare una semplice animazione di una pallina che percorre una circonferenza di raggio e centro fissati, facendo emergere chiaramente come il problema si collochi nell'ambito di quelli discussi più volte nell'ambito del progetto di tirocinio e legati al periodo ed alla ampiezza delle funzioni armoniche. In chiusura di lezione si annunciano alcuni incontri successivi legati allo svolgimento di esercizi.

#### **4/02/04 #1**

11.50-12.40: vengono proposti e svolti alla lavagna insieme agli studenti alcuni esercizi tipici per la manipolazione di funzioni trigonometriche, l'analisi delle loro caratteristiche (ampiezza, fase, periodo) e la risoluzione delle prime semplici equazioni. Inizialmente lasciamo libertà di utilizzo/confronto dei calcolatori programmabili. Si deduce e discute l'identità trigonometrica fondamentale, richiamando il contesto della Scheda 4.

**9/02/04 #2**

10.50-12.40: l'IDC prosegue nell'approfondimento più prettamente disciplinare di proprietà e relazioni fondamentali tra funzioni trigonometriche, assegnando ai ragazzi brevi consegne sotto forma di esercizi ad hoc per rinforzare o spingere alla generalizzazione: partecipiamo ai lavori di gruppo, alla discussione delle soluzioni ed alla progressiva costruzione di una abilità nella manipolazione simbolica dei termini. Nel corso di queste lezioni sono altresì messi a punto di comune accordo con l'IDC i dettagli del questionario di valutazione da proporre in uno degli incontri successivi. Sono assegnati alcuni esercizi da svolgere a casa.

**11/02/04 #1**

11.50-12.40: si procede alla correzione alla lavagna degli esercizi assegnati per compito, chiarendo le questioni poste dagli studenti e fornendo ulteriori indicazioni e proposte di esempi. L'impressione è che la maggior parte della classe abbia ormai acquisito una sufficiente autonomia, specie riguardo le principali e più semplici questioni di manipolazione formale. In chiusura di lezione si danno agli studenti le ultime preziose indicazioni sulle parti più significative da "riguardare" in vista del questionario e si rendono partecipi del significato ultimo dei due questionari che verranno loro proposti nell'arco degli incontri futuri.

**1/03/04 #2**

10.50-12.40: vengono staccati i banchi e consegnati i questionari. Si richiede ai ragazzi di non far uso di appunti, libri o calcolatori programmabile e si lascia loro un'ora per elaborare le risposte. Prima del questionario si danno le indicazioni di rito. La classe lavora diligentemente. In un paio di casi ci vengono richieste informazioni sulle modalità di risposta nelle domande chiuse, per lo più in merito alla possibilità di accompagnare le risposte con un breve commento. La consegna degli elaborati è puntuale.

**10/03/04 #1**

11.50-12.40: vengono consegnati agli studenti i questionari di gradimento. Vengono richieste alcune indicazioni sui metodi di valutazione del questionario del 15 marzo ed ulteriormente in merito alla modalità più opportuna di ripasso. Al termine di questo breve colloquio, l'IDC procede nella correzione e svolgimento di esercizi di trigonometria. La lezione si conclude senza il bisogno di particolari interventi o interazioni con la classe, intenta a seguire le spiegazioni e a prendere appunti.

**15/03/04 #2**

10.50-12.40: vengono riconsegnati gli elaborati e si discutono in presenza della classe i risultati più significativi emersi. Non si forniscono agli studenti le valutazioni numeriche da noi espresse secondo la griglia di valutazione esplicitata negli allegati. Sarà compito dell'IDC formulare una valutazione dell'intera esperienza di cui tenere eventualmente conto nella valutazione complessiva dello studente a fine anno. Nel corso della correzione/discussione si fa occasionalmente riferimento a come si siano evolute le concezioni degli studenti rispetto al questionario iniziale. Non emergono note di rilievo. Si sollecitano gli studenti a riconsegnare al più presto tutti i questionari di gradimento consegnati la settimana precedente.