Unità di lavoro: Matematica finanziaria con Ti92: capitalizzazione e rendite

Le progressioni aritmetiche e la Capitalizzazione semplice

Capitalizzazione semplice

Il capitale di 1000 € viene investito al tasso dello 0,5% mensile. Gli interessi saranno disponibili al momento in cui il capitale verrà ritirato. Si vuole conoscere mese per mese l'importo degli interessi prodotti.

Detto V il capitale iniziale, la formula con cui si ottengono gli interessi è : I = V * i/100 * t

Essendo **t** il tempo di impiego e **i** il tasso percentuale di interesse

Avendo definito in MODE: Sequence, in ambiente Y=EDITOR inseriamo:

u1= 1000*0.5/100*n Fig. 1

In TABLE saranno visibili i risultati Fig. 2

E, dopo aver definito, in WINDOW, gli opportuni parametri di schermo, (Fig. 3) , sarà possibile visualizzare graficamente l'andamento degli interessi Fig. 4

Osserviamo che l'andamento è lineare, cioè gli interessi aumentano in ogni periodo di una somma costante pari a 5 € e quindi costituiscono una progressione aritmetica di ragione 5.

L'importo disponibile alla conclusione della operazione, ossia il capitale più gli interessi, viene detto MONTANTE.

La formula del Montante si otterrà sommando al Capitale iniziale gli interessi :

M = V + I cioè M = V + V * i/100 * t
E quindi

M = V (1+i/100*t)

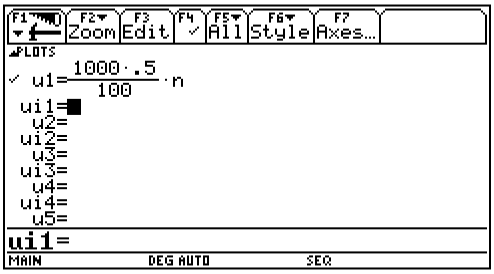


Fig.1

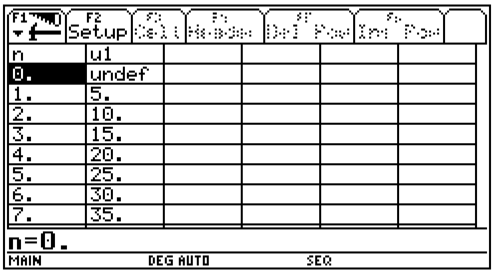


Fig. 2

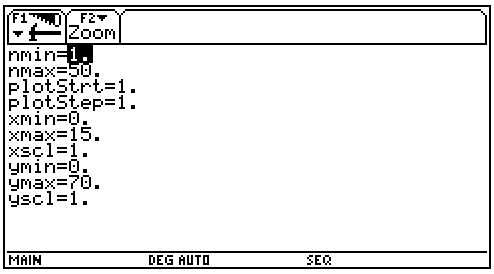


Fig. 3

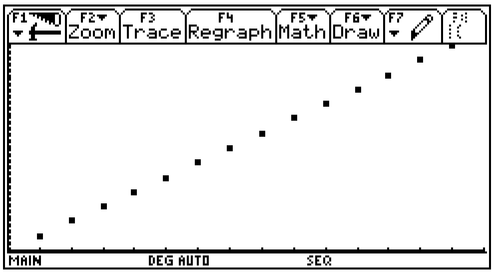


Fig. 4

Problema: si vuole determinare il montante prodotto da un capitale di 1000 € impiegato per 12 mesi al tasso dello 0,5% mensile.
Sarà : M = 1000 * (1+0,5/100*12)

Per eseguire il calcolo con la calcolatrice impostare in ambiente HOME:

solve(m=v*(1+i/100*t),m) | v= 1000 and i=0.5 and t = 12 ♦Enter

si otterrà M = 1060 Fig. 5

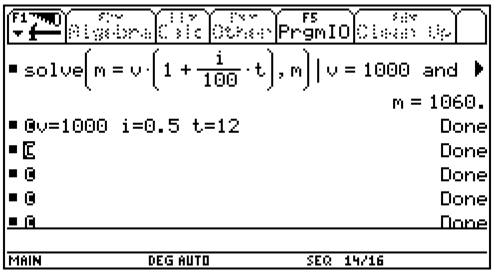


Fig. 5

La formula, variando opportunamente i parametri, consente di risolvere anche problemi inversi.

Esempio 1:

Un Capitale di 1000 € , impiegato per 4 anni, ha prodotto un montante di 1200 €. A quale tasso di interesse annuo era stato impiegato?

Impostare:
solve(m=v*(1+i/100*t),i) | v= 1000 and m=1220 and t = 4 ♦Enter
Fig. 6

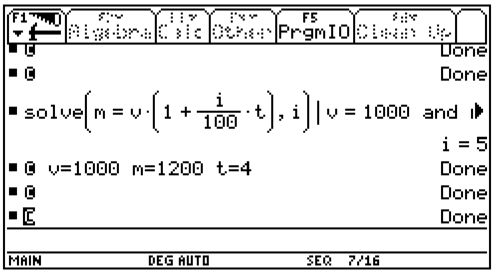


Fig. 6

Esempio 2:
Un Capitale di 500 € , impiegato al tasso di interesse annuo del 5,5 % ha prodotto un Montante di 750 €. Per quanto tempo è stato impiegato?

Impostare:
solve(m=v*(1+i/100*t),t) | v= 500 and m=750 and i = 5.5 ♦Enter

Fig. 7

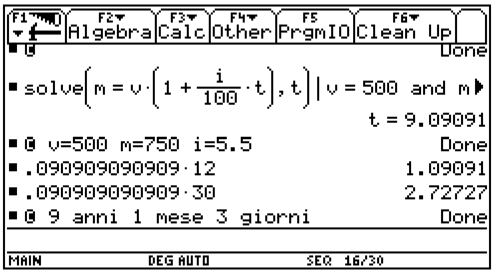


Fig. 7

Le progressioni geometriche e la Capitalizzazione composta

Come è noto, quando si investono capitali per periodi superiori all'anno gli interessi, al temine di ogni periodo di capitalizzazione , si sommano al capitale e diventano a loro volta fruttiferi di interessi. Quindi se investiamo il capitale Co al tempo 0 , al tempo 1 avremo il montante Co*(1+i/100), questo capitale produrrà al tempo 2 un montante = Co*(1+i/100)^2 e così via.

C	Co(1+i/100)	Co(1+i/100)^2	Co(1+i/100)^3	Co(1+i/100)^4	Co(1+i/100)^5	Co(1+i/100)^6
0	1	2	3	4	5	6

Ogni capitale si ottiene dal precedente moltiplicandolo per il fattore (1+i/100) , quindi costituiscono una progressione geometrica di ragione (1+i/100)

Impiegando un capitale per n periodi avremo un montante Cn = Co(1+i/100)^n

Questo tipo di capitalizzazione si dice COMPOSTA.

Un capitale di 1000 € viene depositato in Banca al tasso annuo del 5% , vogliamo seguire l'andamento del nostro investimento negli anni successivi confrontandolo con l'andamento di un investimento equivalente in capitalizzazione semplice (in cui gli interessi vengono pagati solo alla fine e non producono interessi).

In ambiente Y=EDITOR inseriamo le formule:

u1=1000*(1+5/100)^n

e

u2= 1000*(1+5/100*n)

Fig. 1

I risultati sono visibili in ambiente TABLE Fig. 2

e, dopo avere inserito in WINDOW gli opportuni parametri di schermo, Fig. 3 , in GRAPH si poteranno confrontare gli andamenti

Fig. 4

(F6 per definire lo stile Line per il montante semplice)

I termini del montante semplice sono in progressione aritmetica e quindi si dispongono su una retta, mentre quelli del montante composto sono in progressione geometrica e si dispongono lungo una curva esponenziale.

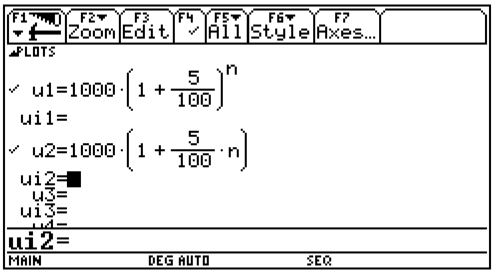
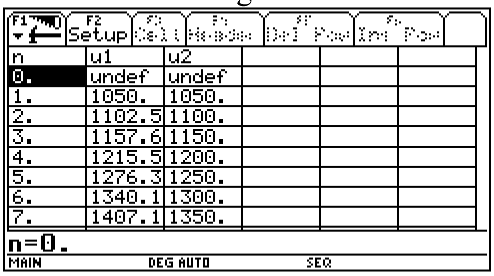


Fig. 1



n	u1	u2
0.	undef	undef
1.	1050.	1050.
2.	1102.5	1100.
3.	1157.6	1150.
4.	1215.5	1200.
5.	1276.3	1250.
6.	1340.1	1300.
7.	1407.1	1350.

Fig. 2

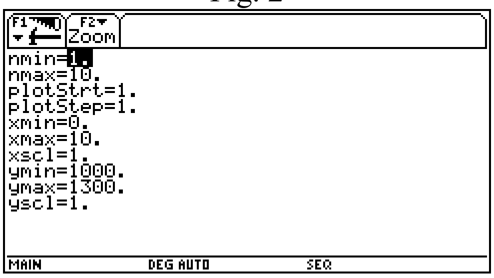


Fig. 3

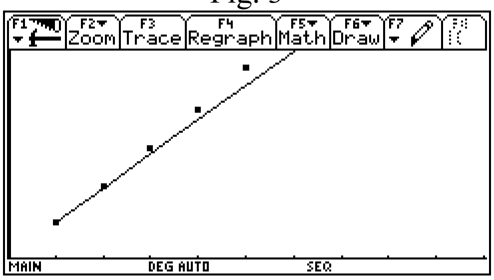


Fig. 4

Capitalizzazione composta

Come per la capitalizzazione semplice la calcolatrice, con un'unica formula, permette di risolvere i problemi diretti e inversi della capitalizzazione composta.
Indicheremo con ***vf*** il valore finale (montante) , con ***va*** il valore iniziale (valore attuale), con ***i*** il tasso e con ***n*** il tempo.

Problema 1:

Un capitale di 1000 € è stato investito al tasso del 5% annuo per 6 anni. Quale montante risulta prodotto alla fine del periodo di impiego?
In ambiente HOME inserire:

solve(vf=va*(1+i/100)^n,vf) | va=1000 and i=5 and n=6 [♦Enter]

Fig. 5

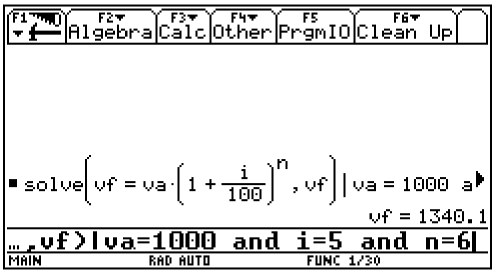


Fig. 5

Problema 2:

Un capitale di 1000 € è stato investito per 6 anni e ha prodotto un montante di € 1340.1 . A quale tasso è stato investito?

In ambiente HOME inserire:

solve(vf=va*(1+i/100)^n,i) | va=1000 and vf=1340.1 and n=6 [♦Enter]

Fig. 6

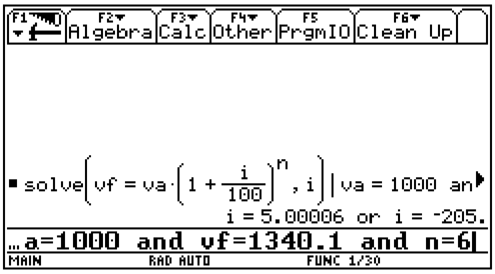


Fig. 6

Problema 3:

Un capitale di 2000 € è stato investito al tasso del 5% ha prodotto un montante di € 2300 .
Per quanto tempo è stato impiegato?

In ambiente HOME inserire:

solve(vf=va*(1+i/100)^n,n) | va=2000 and vf=2300 and i=5 [♦Enter]

Fig. 7

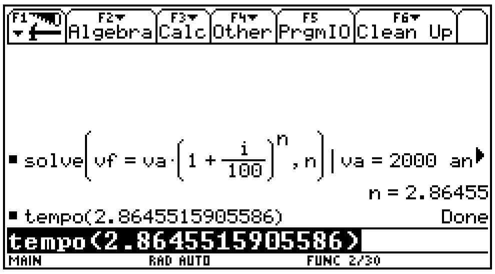


Fig. 7

Sarebbe meglio esprimere il tempo in anni, mesi, giorni. Per far ciò rapidamente si può costruire un programma.

Premere APPS
selezionare 7:Program Editor
selezionare 3:New
selezionare : Program
definire come nome di variabile : ***tempo***

Digitare il programma a lato:

```
Tempo(t)
Prgm
ClrIO
Int(t)→a
(t-a)*12 → t1
int(t1) → m
t1 – m → t1
t1 * 30 → t1
round(t1,0) → g
Disp "anni="&string(a)
Disp "mesi="&string(m)
Disp " giorni= »&string(g)
EndPrgm
```

In HOME digitare:

tempo(2,86455)
comparirà:

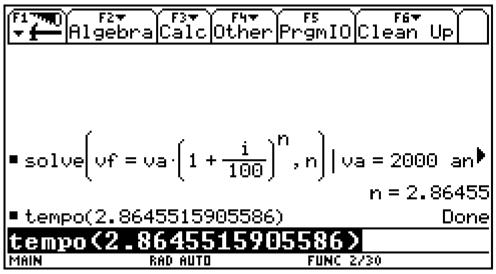


Fig. 8

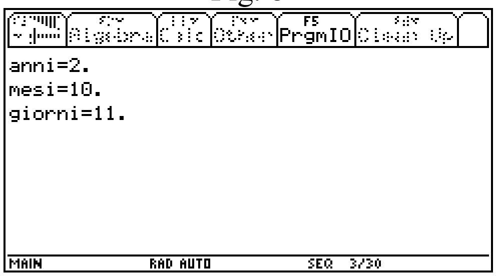


Fig. 9

Problema 4:
Si vuole determinare il quanto tempo un capitale, impiegato al tasso del 5,5 % raddoppia.

L'importo del capitale è ininfluente, quindi consideriamo va = 1 e vf = 2.

Digitiamo:
solve(vf=va*(1+i/100)^n,n)|va = 1 and vf = 2 and i = 5.5 ♦Enter

si ottiene 12.9462
attraverso la funzione tempo(12.9426) si ha il tempo di raddoppio in anni, mesi, giorni.

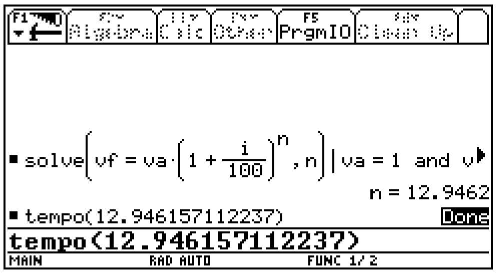


Fig. 10

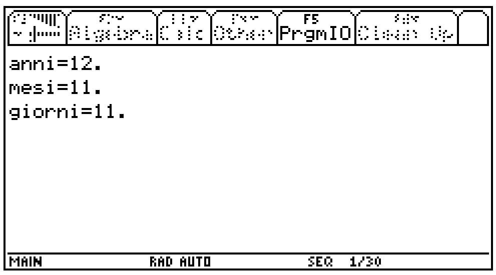


Fig. 11

Equivalenza di capitali

La formula che abbiamo utilizzato per la capitalizzazione composta permette anche di valutare capitali disponibili in tempi diversi.

Sappiamo tutti che un capitale di 1000 € disponibile immediatamente ha un valore diverso da un capitale di 1000 € disponibile fra 3 anni.
L'inflazione erode il valore del capitale e anche se l'ingresso dell'Italia nella moneta unica europea dovrebbe garantire un'inflazione massima del 3% o 4% annuo si verifica che il potere d'acquisto della moneta diminuisce più di quanto indicato dai dati ufficiali.
Inoltre bisogna valutare quale sicurezza abbiamo della futura riscossione, quindi il capitale equivalente ad un capitale di 1000 € odierni dovrà essere valutato come un montante calcolato ad un tasso determinato.

In parole povere, avendo la scelta fra riscuotere un capitale di 1000 € subito o fra 3 anni , non avremmo dubbi perché è altamente improbabile che il potere d'acquisto del capitale aumenti, potremmo valutare la proposta se ci offrissero alla scadenza dei 3 anni il montante dei 1000 € valutati, ad esempio, ad un tasso del 5 % annuo, cioè 1.000 * (1+5/100)^3 = X da cui X=1.157,63

Viceversa, dovendo riscuotere fra 3 anni la somma di € 1157, ad esempio quale rimborso di un prestito, se il nostro debitore si offrisse di saldare oggi, anticipatamente, il suo debito, sarebbe equo praticargli uno sconto del 5% annuo e quindi incassare subito € 1000.
L'operazione si effettua con la stessa formula del montante composto prendendo come incognita il valore iniziale

X * (1+5/100)^3 = 1.157,63 da cui X = 1.000

I 1.000 € incassati oggi si chiamano **Valore attuale** del capitale di 1.157 € scontato per 3 anni al tasso del 5% annuo.
Cioè diciamo che i 1.000 € attuali e i 1.157 € fra tre anni sono due **capitali equivalenti** al tasso del 5%.

Esempio 1 :
Abbiamo diritto a riscuotere, da un nostro debitore, tre capitali : il primo di € 1500 con scadenza fra 2 anni, il secondo di € 2000 con scadenza fra 3 anni e il terzo di € 3000 con scadenza fra 4 anni. Oggi, poiché necessitiamo immediatamente di denaro, chiediamo al debitore di rimborsarci anticipatamente e, in cambio, gli concederemo di scontarli valutandoli al tasso del 6% annuo. Quale somma ci sarà versata?

Va		1500	2000	3000
0	1	2	3	4

Per calcolare la somma dobbiamo sommare gli importi dei valori attuali dei tre capitali valutati al tasso del 6% cioè € 5390.51 Fig. 10 e Fig. 11

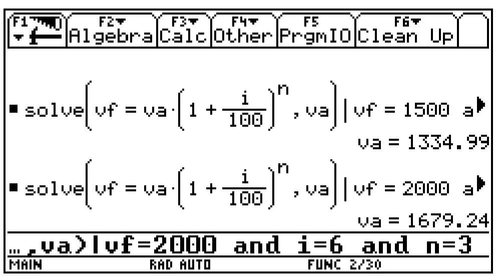


Fig. 12

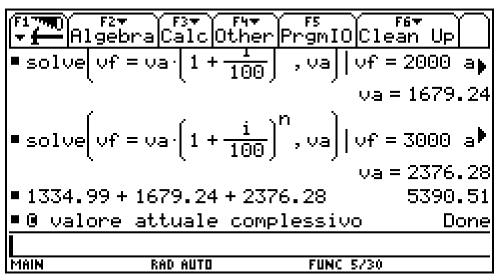


Fig. 13

Esempio 2 :

Riferendoci alla situazione precedente, supponiamo, invece, che il nostro debitore ci chieda di pagare tutti i debiti, in un'unica soluzione, alla scadenza dell'ultimo debito. La valutazione sarà fatta al tasso del 6% annuo. Quanto riscuoteremo alla scadenza.

Dovremo calcolare i montanti dei primi due capitali rispettivamente per 2 anni e per un anno e sommeremo questi risultati all'importo del terzo capitale.

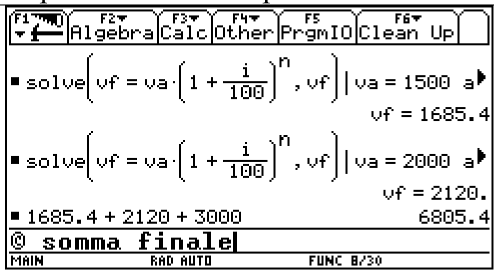


Fig. 14

Operazioni ripetitive di questo tipo potrebbero essere velocizzate costruendo una ***function*** che calcoli il montante vf.

Premere APPS
selezionare 7:Program Editor
selezionare 3:New
selezionare : Function
definire come nome di variabile : ***vff***

Digitare la function.

```
Vff(vaa,ii,nn)
Func
Approx(vaa*(1+ii/100)^nn)
EndFunc
```

Passare in HOME e digitare:
vff(1500,6,2)+vff(2000,6,1)+3000
Fig. 16

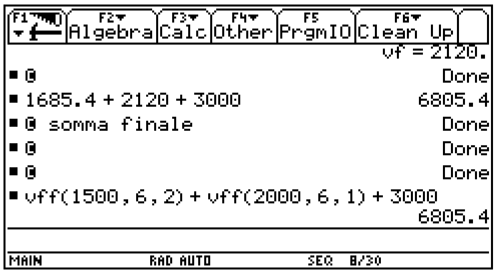


Fig. 16

Potremmo procedere in maniera analoga anche per il calcolo dei valori attuali dell'esempio precedente. Quindi costruiamo una ***function*** che calcoli il valore attuale.

Premere APPS
selezionare 7:Program Editor
selezionare 3:New
selezionare : Function
definire come nome di variabile : ***vaa***

Digitare la function a lato:

```
vaa(vff,ii,nn)
Func
approx(vff/(1+ii/100)^nn)
EndFunc
```

Passare in HOME e digitare:
vaa(1500,6,2)+vaa(2000,6,3)+vaa(3000,6,4)

Fig. 17

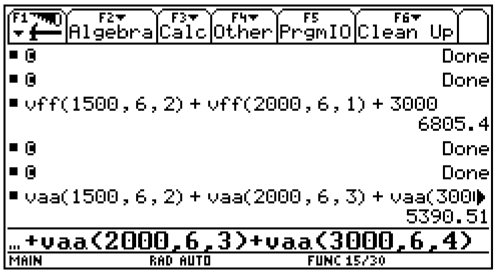


Fig. 17

Esempio 3:

Si vuole calcolare il montante di un capitale di 1000 € al tasso del 6.5% impiegato per 3 anni, 8 mesi e 15 giorni.

Il problema è costituito dal fatto che il tempo non è intero e va quindi convertito in frazione di anno.
Il calcolo può essere eseguito facilmente calcolando:

$$n = 3 + \frac{8}{12} + \frac{15}{365}$$

Se questo tipo di calcolo ricorre frequentemente, conviene definire una function che esegua il calcolo automaticamente.

Premere APPS
selezionare 7:Program Editor
selezionare 3:New
selezionare : Function
definire come nome di variabile : ***tmpanni***

Digitare la function a lato :

```
tmpanni(aa,mm,gg)
Func
approx(aa+mm/12+gg/365)
EndFunc
```

Passare in HOME e digitare:

vff(1000,6.5,tmpanni(3,8,15))

Fig. 18

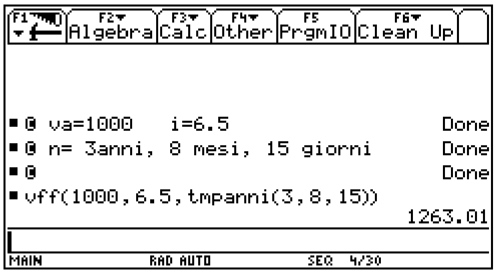
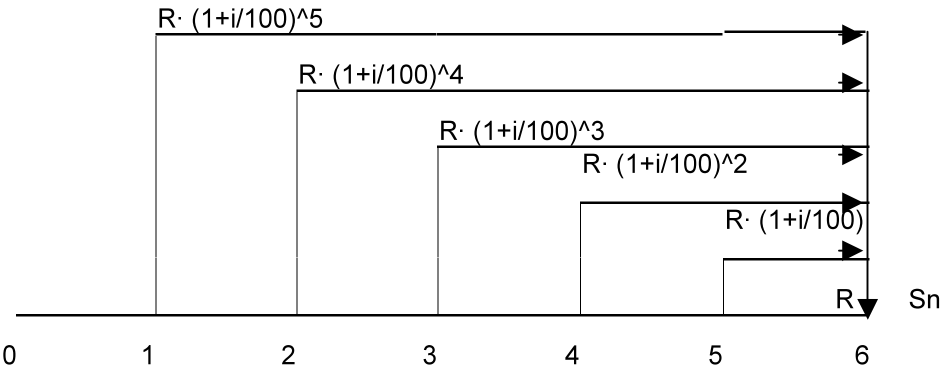


Fig. 18

Pagamenti e versamenti rateali: Rendite

Consideriamo un problema pratico:
I genitori di un ragazzo di 12 anni, vogliono costituire un fondo per gli studi universitari del figlio versando, alla fine di ogni anno, 2000 € su un conto corrente bancario su cui viene applicato il tasso di interesse del 5% . Quale capitale risulterà costituito all'atto del versamento della sesta rata ?



In base a quanto detto sopra, il calcolo si effettuerà sommando i montanti delle singole rate, cioè, partendo dal fondo:

Sn = R + R (1+i/100) + R (1+i/100)^2 + R (1+i/100)^3 + R (1+i/100)^4 +R (1+i/100)^5

raccogliendo R a fattor comune
Sn = R (1 + (1+i/100) + (1+i/100)^2 + (1+i/100)^3 + (1+i/100)^4 + (1+i/100)^5)

Si osserva che i termini fra parentesi costituiscono la somma di 6 termini di una **progressione geometrica** di primo termine 1 e ragione (1+i/100), quindi la somma si può calcolare anche con la formula delle progressioni geometriche, ossia

$$sn = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ e si ottiene $$Sn = \frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n - 1}{1+\frac{i}{100} - 1}$$ quindi

$$\boxed{Sn = R\,\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n - 1}{\frac{i}{100}}}$$ e , nel nostro caso particolare $$Sn = 2000\,\frac{\left(1+\frac{5}{100}\right)^6 - 1}{\frac{5}{100}} = 13.603,8$$

Inserire in ambiente HOME

nSolve(sn=r*((1+i/100)^n)-1)/(i/100),sn) | r = 2000 and n = 6 and i=5 ♦Enter

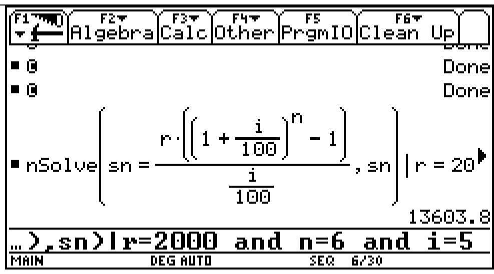


Fig. 1

Supponiamo ora che un nonno generoso, per sollevare i genitori da tale impegno, decida di versare oggi un capitale unico che equivalga a tutti i versamenti futuri, cioè tale che produca in 6 anni, al tasso del 5% lo stesso capitale di 13.603,8 € . Quale capitale (**Valore attuale**) dovrebbe versare?

In base a quanto detto sull'equivalenza di capitali, basta calcolare il valore attuale di Sn, cioè

$$An = \frac{Sn}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n}$$

$$An = R\,\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n - 1}{\frac{i}{100}\left(1+\frac{i}{100}\right)^n} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{An = R\,\frac{100}{i}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n}\right)}$$

e, nel nostro caso $\quad An = 2000\,\frac{100}{5}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^6}\right) = 10.151,4$

Le formule nei riquadri forniscono quindi montante e valore attuale di un pagamento rateale.

<table>
<tr>
<td>Inserire in ambiente HOME

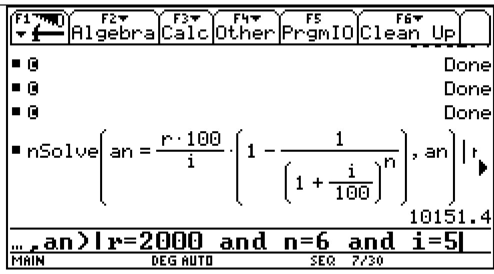
nSolve(an=r*100 / i * (1-1/(1+i/100)^n),an) \|
r = 2000 and n = 6 and i=5</td>
<td>

Fig. 2</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Problema 1:

Per l'acquisto di un'automobile ci viene proposto un mutuo al tasso del 5% annuo (circa 0,4% mensile della durata di 4 anni con rate mensili. Sapendo che possiamo pagare una rata massima mensile di 200 €, quanto potrà costare al massimo l'automobile ?

Elementi noti: Rata = 200 € n.rate = 48
tasso mensile 0,4%
Elemento incognito : An

Inserire in ambiente HOME

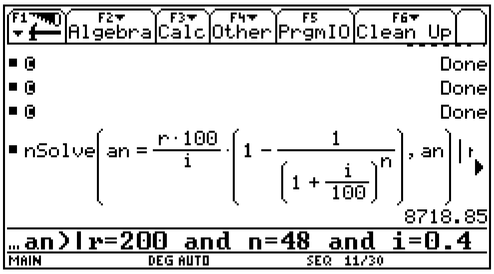
nSolve(an=r*100 / i * (1-1/(1+i/100)^n),an) \|
r = 200 and n = 48 and i=0.4</td>
<td>

Fig. 3</td>
</tr>
</table>

Problema 2

Per l'acquisto di un'automobile ci viene proposto un mutuo al tasso del 5% annuo (circa 0,4% mensile della durata di 4 anni con rate mensili. Abbiamo trovato un'auto che costa 8.000 €, qual è l'importo della rata mensile che dovremo pagare ?

Inserire in ambiente HOME

nSolve(an=r*100 / i * (1-1/(1+i/100)^n),r) | an = 8000 and n = 48 and i=0.4

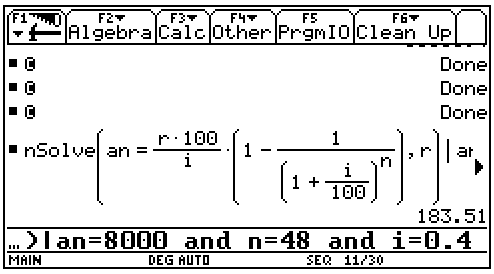


Fig. 4

Problema 3

Un'automobile viene offerta al costo di 12.000 € pagabili con rate mensili di 200 € per 5 anni.
Ci chiediamo quale tasso di interesse viene applicato.

Si tratta di un pagamento rateale di cui conosciamo il Valore Attuale An = 12000 € , l'importo della rata R= 200, il numero delle rate n= 60

Per questo problema, in cui è incognito il tasso, la calcolatrice non è in grado di effettuare direttamente il calcolo indicando come incognita i, occorre dunque procedere per tentativi.
Cioè, mantenendo la formula per il calcolo di An, si effettueranno diversi tentativi in relazione a diversi valori di i , finalizzati a una sempre miglior approssimazione di An.

Inserire in ambiente HOME

nSolve(an=r*100 / i * (1-1/(1+i/100)^n),an) | r = 200 and n = 60 and **i=0.4**

Successivamente catturiamo l'espressione e modifichiamo il tasso allo 0,5 % e così via fino ad ottenere come risultato di An un valore prossimo a 10.000 .
Osserviamo che 0,6 dà una buona approssimazione e corrisponde ad un tasso annuo di circa 7,2%

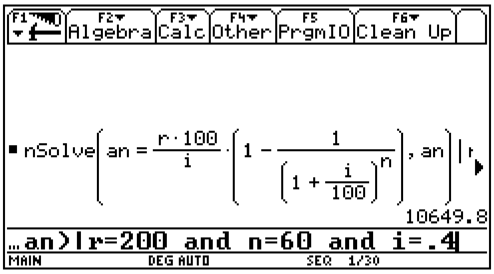


Fig. 5

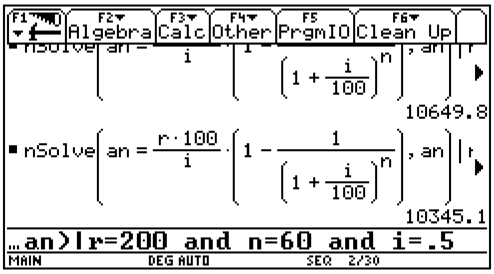


Fig. 6

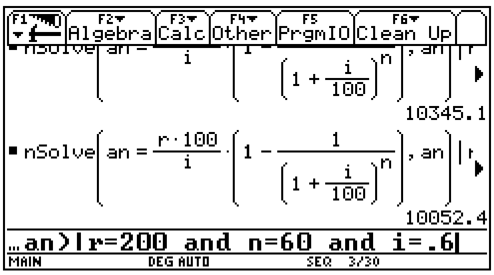


Fig. 7

Problema 4

Vogliamo acquistare una casa che costa 150.000 € e la banca è disposta a concederci un mutuo al tasso annuo del 5% con rate pagabili mensilmente (tasso mensile equivalente circa 0,4 %).
Sapendo che la rata massima mensile che possiamo permetterci è di 800 €, quale dovrà essere la durata del mutuo ?

Per questo problema, in cui è incognito il tasso, la calcolatrice non è in grado di effettuare direttamente il calcolo indicando come incognita i, occorre dunque procedere per tentativi.
Cioè, mantenendo la formula per il calcolo di An, si effettueranno diversi tentativi in relazione a diversi valori di i , finalizzati a una sempre miglior approssimazione di An.

Inserire in ambiente HOME

nSolve(an=r*100 / i * (1-1/(1+i/100)^n),an) | r = 800 and i=0.4 and **n = 300**

Successivamente catturiamo l'espressione e modifichiamo n impostandone il valore in 400 e così via fino ad ottenere come risultato di An un valore prossimo a 150.000 .

Osserviamo che occorreranno circa 30 anni per estinguere il mutuo.

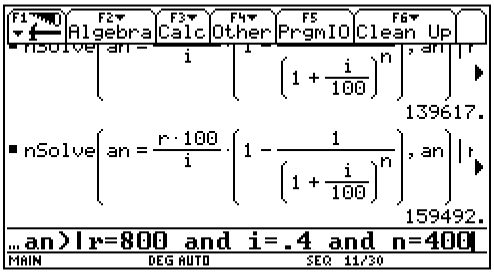


Fig. 8

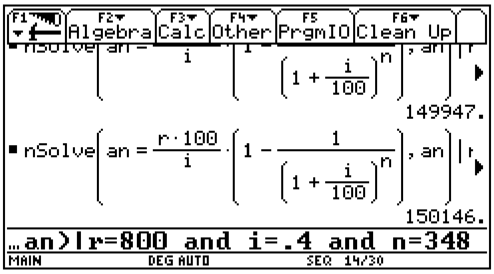


Fig. 9

Risoluzione dei problemi precedenti con uso delle function

Problemi che richiedono calcoli ripetitivi come i problemi 3 e 4 possono presentare soluzioni graficamente più sintetiche utilizzando una ***function*** per il calcolo di An.

Premere APPS
selezionare 7:Program Editor
selezionare 3:New
selezionare : Function
definire come nome di variabile : ***aan***

Digitare la function a lato :

```
aan(rr,ii,nn)
Func
approx(rr*100/ii*(1-1/(1+ii/100)^nn))
EndFunc
```

Passare in HOME e digitare:

aan(200,0.4,60)
ecc. Fig. 10

Analogamente puo essere costruita la ***function ssn***

Ssn(rr,ii,nn)
Func
approx(rr*((1+ii/100)^nn-1)/(ii/100))
EndFunc

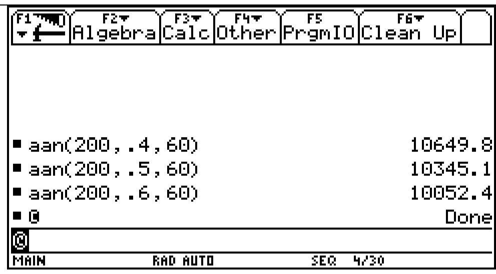


Fig. 10

Tassi periodali

Spesso, nei problemi relativi a pagamenti rateali si fa riferimento a periodi inferiori all'anno: semestre, trimestre, mese quindi nelle operazioni di calcolo devono essere usati tassi relativi a questi periodi.
Spesso il tasso indicativo è annuale.
Per ottenere i tassi periodali equivalenti o, invece, per sapere a quale tasso annuo corrisponde un tasso periodale, si utilizza la formula:

$$(1+\frac{i}{100}) = (1+\frac{i_n}{100})^n$$

dove n indica il frazionamento di anno, cioè:
al semestre corrisponde 2
al trimestre " 4
al quadrimestre " 3
al bimestre " 6
al mese " 12

Fig. 11

Esempio: a quale tasso semestrale corrisponde il tasso annuo del 7,5% ?

solve((i+i/100)=(1+in/100)^n,in)|i=7.5 and n =2 and in>0 ♦Enter

Fig. 12

e a quale tasso mensile?
solve((i+i/100)=(1+in/100)^n,in)|i=7.5 and n =12 and in > 0 ♦Enter

Fig. 13

Spesso, comunque, nei problemi pratici si ricorre al tasso nominale convertibile.
Esempio : Se si dice che un'operazione viene fatta al tasso del 6% annuo convertibile semestralmente, significa che il tasso effettivamente applicato è del 3% semestrale (6/2 %)

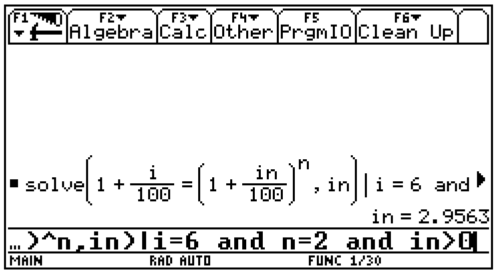


Fig. 11

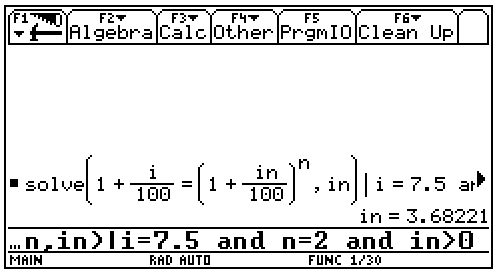


Fig. 12

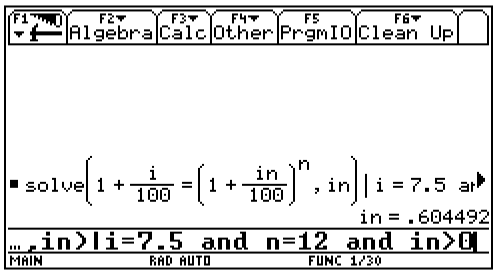


Fig. 13

Accrescimento istantaneo e funzione esponenziale

Interesse istantaneo

I tassi periodali vengono applicati i frequente, ad esempio, come già visto, nei pagamenti rateali la rata è spesso mensile. Anche gli interessi dei buoni del tesoro vengono calcolati semestralmente. Spesso si utilizzano quindi tassi nominali convertibili, cioè i tassi effettivi si ottengono dividendo il tasso annuo per il frazionamento. Ad esempio un tasso trimestrale si otterrà dividendo il tasso annuo nominale per 4: $i_4 = i/4$
Eseguiamo alcuni calcoli di montanti con tassi periodali diversi.

Calcolare il montante prodotto da un capitale di 1.000 € impiegato per 1 anno al tasso annuo del 6%

Vf = 1000 (1+6/100)
Vf=1060.0
solve(vf=va*(1+i/100),vf) | va=1000 and i=6 ♦Enter

Se gli interessi si calcolano ogni 6 mesi, il 6% annuo diventa in effetti un 6/2 = 3% semestrale e

Vf = 1000 $(1+6/100/2)^2$
Vf=1060.9

solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=1000 and i=6 and n =2 ♦Enter
Fig. 1

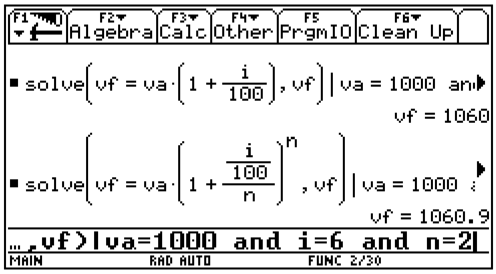


Fig. 1

Se gli interessi si calcolano ogni 3 mesi, il 6% annuo diventa in effetti un 6/4 = 1,5% trimestrale e

Vf = 1000 $(1+6/100/4)^4$
Vf=1061.36

solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=1000 and i=6 and n =4 ♦Enter

Se gli interessi si calcolano ogni mese, il 6% annuo diventa in effetti un 6/12 = 0,5 % mensile e

Vf = 1000 $(1+6/100/12)^{12}$
Vf=1061.68

solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=1000 and i=6 and n =12 ♦Enter
Fig. 2

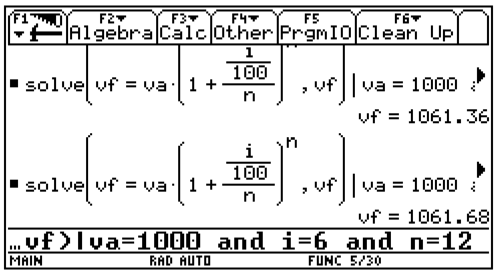


Fig. 2

Quindi, sembra che più frequentemente viene calcolato l'interesse composto, più alto sarà l'interesse guadagnato. Ci chiediamo se vi è un limite oppure se i 1000 € frutteranno un interesse illimitato. Calcoliamo quindi anche l'interesse giornaliero, quello orario e quello al minuto. Sulla calcolatrice basta cambiare l'ultimo elemento.

<table>
<tr><td>Interesse giornaliero

Vf = 1000 (1+6/100/365) ^{365}
Vf = 1061.83

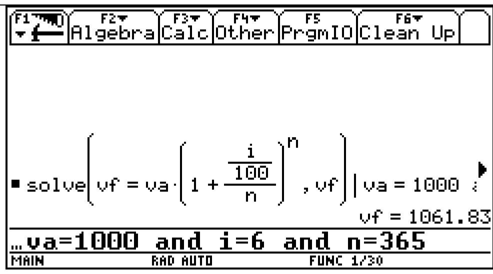
solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=1000 and i=6 and n =365 ♦Enter
Fig. 3</td><td>

Fig. 3</td></tr>
<tr><td>Interesse orario

Vf = 1000 (1+6/100/(365*24)) ^{365x24}
Vf = 1061.84

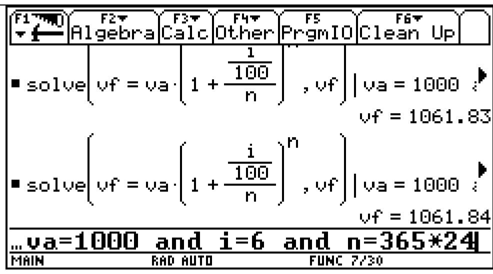
solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=1000 and i=6 and n =365*24 ♦Enter
Fig. 4</td><td>

Fig. 4</td></tr>
<tr><td>Interesse al minuto

Vf = 1000 (1+6/100/(365*24*60)) ^{365x24x60}
Vf = 1061.84

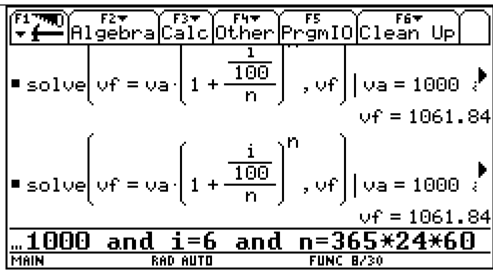
solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=1000 and i=6 and n =365*24*60 ♦Enter
Fig. 5</td><td>

Fig. 5</td></tr>
</table>

Questo sembra quindi il limite di ciò che si può guadagnare, equivalente a circa il 6,184% annuo.

Problema:
Una banca offre il 7.5 % annuo nominale con interesse istantaneo, Una seconda banca offre invece il 7.75 % annuo effettivo. Qual è l'offerta migliore? La situazione cambia se i tassi di interesse di entrambe le banche calano dell'1% ?

<table>
<tr><td>Con la formula precedente calcoliamo il montante di 100 € al tasso istantaneo del 7,5%

Vf = 100 (1+7.5/100/(365*24*60)) ^{365x24x60}
Vf = 107,788

solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=100 and i=7.5 and n =365*24*60 ♦Enter

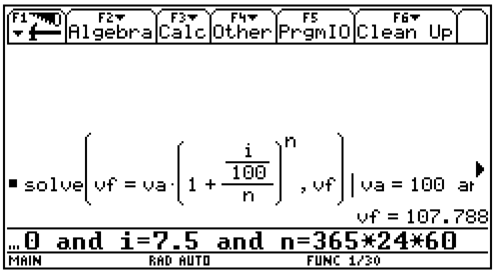
Il risultato corrisponde ad un interesse annuo del 7,788 % annuo e che quindi è più conveniente del tasso del 7,75% proposto dall'altra Banca.</td><td>

Fig. 6</td></tr>
</table>

Fig. 6

Nel caso che i due tassi diminuiscano dell'1% si ha:

$Vf = 100\ (1+6.5/100/(365*24*60))^{365x24x60}$

$Vf = 106.716$

solve(vf=va*(1+i/100/n)^n,vf) | va=100 and i=6.5 and n =365*24*60 ♦Enter

Il risultato corrisponde ad un interesse annuo del 6.716 % annuo e che quindi è **meno** conveniente del tasso del 6,75% proposto dall'altra Banca.

Fig. 7

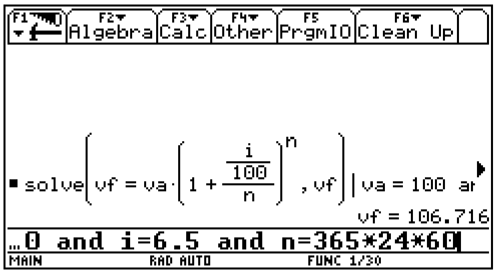


Fig. 7

Il numero e

Lo studio dell'interesse istantaneo ci porta a chiederci cosa accade a $(1+6/100/n)^{n}$ quando n tende all'infinito, cioè a cercare il $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{6}{100}\frac{1}{n})^{n}$.

Un risultato interessante si ha nel caso in cui si considera, invece del 6%, un tasso del 100% . Anche se questo esempio non significa molto in termini di capitalizzazione, è applicabile ad altri fenomeni di crescita (esempio: crescita di batteri) e conduce ad un numero importante in Matematica.

Per i=100% il limite sopra diventa : $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}$ usando la Ti92 calcoliamo diversi valori per n= 10, 100, 1000, ecc

Per i calcoli potremmo usare le formule già viste

approx((1+1/n)^n)|n=10
approx((1+1/n)^n)|n=100

Oppure, più efficacemente, possiamo usare una tabella.
Premere APPS e selezionare:
6: Data /Matrix Editor
3: New
Definire un nome di variabile a piacere (esempio: esp)
Premere F1 , selezionare 9: Format
Definire per Cell Width la dimensione 10

Nella colonna **c1** inserire le potenze di 10:
1, 10, 1000, ecc.
Premere su c2 e digitare : (1+1/c1)^c1
Nella colonna compariranno le approssimazione del numero *e*
Per un confronto, nella cella c31 è stato inserito EXP(1)

Fig. 8

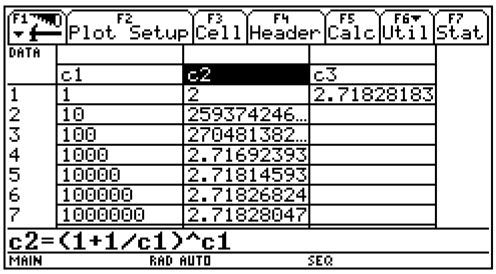


Fig. 8

Ricaviamo quindi che

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2.71828183 \text{ fino a 8 cifre decimali}$$

Questo limite è il famoso numero di Nepero $\boldsymbol{e}$, che è la base dei logaritmi naturali o neperiani. (In effetti è stato introdotto da Eulero).
Come π e $\sqrt{2}$ è un decimale con infinite cifre non periodico. Contrariamente a $\sqrt{2}$, π ed e non sono radici di alcuna equazione algebrica e vengono detti numeri trascendenti.

La funzione esponenziale

Il caso studiato sopra, come già detto, corrisponde ad un tasso di interesse del 100% , per calcoli con tassi diversi occorre usare la formula $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ con x = tasso unitario, cioè = i/100

Si ha che: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ad esempio: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n = e^{0.06}$

Quindi il montante di 1 €, per un anno, ad interesse istantaneo del 6% , sarà = e $^{0.06}$

Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n = e^{0.06x}$$

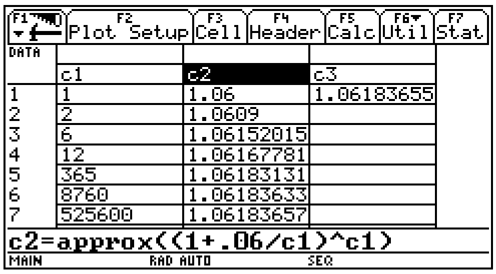
Premere APPS e selezionare:
6: Data /Matrix Editor
3: New
Definire un nome di variabile a piacere
(esempio: fesp)
(se necessario: Premere F1, selezionare 9: Format
Definire per Cell Width la dimensione 10)

Inserire in C1 i frazionamenti:
1, 2, 6, 12, 365, 365*24, 365*24*60
(Vedi Pag. 1 e 2)
Selezionare l'intestazione della colonna c2 e inserire la formula:
approx((1+0.06/c1)^c1)

Si verifica che i risultati approssimano il contenuto della cella C3_1 in cui è stato inserito il valore di e $^{0.06}$

Fig. 9

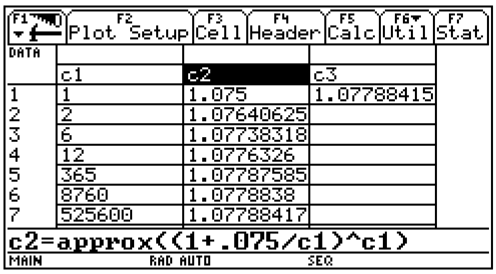
Analogamente possiamo verificare che il montante, ad interesse istantaneo, di una lira al tasso del 7,5% è = 1.07788, cioè che l'interesse istantaneo è del 7,788 %, ritrovando il risultato di Fig. 6.



	c1	c2	c3
1	1	1.06	1.06183655
2	2	1.0609	
3	6	1.06152015	
4	12	1.06167781	
5	365	1.06183131	
6	8760	1.06183633	
7	525600	1.06183657	

c2=approx((1+.06/c1)^c1)

Fig. 9



	c1	c2	c3
1	1	1.075	1.07788415
2	2	1.07640625	
3	6	1.07738318	
4	12	1.0776326	
5	365	1.07787585	
6	8760	1.0778838	
7	525600	1.07788417	

c2=approx((1+.075/c1)^c1)

Fig. 10